MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
MÜNSTER

H. WIELANDT
MAINZ

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. HERGLOTZ
A. E. INGHAM H. KNESER O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

53. BAND 4. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 20. NOVEMBER 1950)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1950

Math.
Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Eßlinger Straße 16,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Zürich/Schweiz, Hadlaubstraße 45,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Münster/W., Schlaunstraße 4.

Geschäftsführender Herausgeber:
H. Wielandt, Mainz, Göttelmannstraße 2⅝₁₀

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

Vertriebsvertretungen im Ausland: Schweiz: Lange, Maxwell & Springer A. G., Basel, Schützenmattstr. 43 — England, USA und übriges Ausland: Lange, Maxwell & Springer Ltd., 41—45 Neal Street, London W. C. 2.

53. Band. **Inhalt:** 4. Heft.

Seite

Gaier, D., University of Rochester, Todd Union, Rochester 3 N.Y., USA.: Über stetiges und asymptotisches Verhalten von Potenzreihen und Dirichletschen Reihen am Rande von Summationsgebieten 291

Jurkat, Dr. W., Tübingen, Mathem. Institut der Universität: Zur Konvergenztheorie der Fourierreihen..... 309

Haack-Hellwig, Prof. Dr. W. Haack, Institut für angew. Mathematik der Techn. Universität, Berlin-Charlottenburg 2, Hardenbergstr. 34: Über Systeme hyperbolischer Differentialgleichungen erster Ordnung II..... 340

Specht, Prof. Dr. W., Erlangen, Mathem. Seminar der Universität: Abschätzung der Wurzeln algebraischer Gleichungen II..... 357

Wagner, Doz. Dr. K., Köln-Rath, Wodanstr. 57: Zum Repräsentantenproblem der Logik für Aussagenfunktionen mit beliebig endlich oder unendlich vielen Wahrheitswerten..... 364

Pickert, Doz. Dr. G., Tübingen, Mathem. Institut der Universität: Bemerkungen zum Homomorphiebegriff..... 375

Buchholz, Prof. Dr. H., Seeheim, Bergstr. 22: Komplexe Integrale für die parabolischen Funktionen mit dem wesentlich singulären Kern $\exp(-z/2 \cdot \operatorname{Tg} s)$ 387

Unveränderter Nachdruck 1969 Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York

Fotodruck: Mikrokopie GmbH. · München 22 · Bruderstraße 9

Mathematische Zeitschrift, Band 53, Heft 4, S. 291—308 (1950).

Über stetiges und asymptotisches Verhalten von Potenzreihen und Dirichletschen Reihen am Rande von Summationsgebieten.

Von

Dieter Gaier in Göppingen.

Einleitung.

Das Funktionselement

$$\text{(I)} \qquad f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

der komplexen Variablen $z = re^{i\varphi}$ ($r \geqq 0$, φ reell) besitze den Konvergenzradius 1, und seine Teilsummen seien mit

$$s_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$$

bezeichnet. Die Aufgabe, aus dem Verhalten der Reihe (I) im Randpunkt $z_0 = 1$ ihres Konvergenzgebietes auf das Verhalten der dort durch (I) dargestellten analytischen Funktion bei Annäherung an diesen Randpunkt zu schließen, ist schon durch den bekannten Abelschen Grenzwertsatz angegriffen worden. In der Stolzschen Verallgemeinerung besagt er, daß unter der Voraussetzung der Konvergenz der Reihe (I) im Punkt $z_0 = 1$ sich $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ stetig verhält, wenn z in einem Stolzschen Winkelraum an $z_0 = 1$ heranrückt.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit Verallgemeinerungen dieses Problems in drei Richtungen:

1. Das Verhalten von Potenz- und Dirichletschen Reihen wird nicht nur am Rande des Konvergenzgebietes untersucht, sondern auch am Rande von Summationsgebieten, die man erhält, wenn man gewisse permanente Summierungsverfahren auf die Reihe (I) anwendet.

2. Statt vom Konvergenzverhalten der V-Transformation im Randpunkt z_0 des V-Summationsgebietes auf die Stetigkeit der dort dargestellten Funktion $f(z)$ bei Annäherung an z_0 zu schließen, wird allgemeiner ein gewisses asymptotisches Verhalten der V-Transformation in z_0 vorausgesetzt, d. h. bei Potenzreihen etwa

$$\text{(II)} \qquad V(n; s_\nu(z_0)) \sim n^q \qquad (n \to \infty)$$

und daraus ein bestimmtes asymptotisches Verhalten von $f(z)$ für $z \to z_0$ gefolgert.

3. Schließlich werden wir noch hinsichtlich der an z_0 heranführenden Wege, längs deren das Verhalten von $f(z)$ untersucht werden soll, eine Verallgemeinerung vornehmen. Das Verhalten (II) hat, wie sich zeigen wird, die Regularität der im Nullpunkt durch (I) definierten Funktion in einem gewissen, an z_0 heranreichenden Gebiet $\mathfrak{G}$ zur Folge, das im allgemeinen nicht innerhalb des V-Summationsgebietes zu liegen braucht. (Beim Borelschen Verfahren beispielsweise ist $\mathfrak{G}$ das Innere des über der Strecke $(0, z_0)$ als Durchmesser geschlagenen Kreises.) Es wird nun das Verhalten von $f(z)$ längs solcher Wege untersucht, die den Rand des Gebietes $\mathfrak{G}$ in z_0 von beliebig großer Potenzordnung berühren können.

Um diese allgemeinen Aussagen machen zu können, sind gewisse Zusatzvoraussetzungen notwendig, die das Verhalten (II) betreffen. Diese bestehen darin, daß an die Geschwindigkeit, mit der sich $V(n; s_\nu(z_0))$ an n^q anschmiegt, zusätzliche Forderungen gestellt werden.

In § 1 wird das Verhalten von Potenzreihen am Rande der Summationsgebiete untersucht, die man mit Hilfe der Verfahren von Cesàro und Euler-Knopp, sowie des S_α-Verfahrens gewinnt. Die Beweise werden lediglich für das Cesàro-Verfahren vollständig durchgeführt, da sie in den andern Fällen ähnlich verlaufen. In § 2 werden die Untersuchungen zusammengefaßt, die sich mit dem Verhalten von Potenzreihen am Rande des Borelschen Summationsgebietes und mit dem Verhalten von Dirichletschen Reihen am Rande der R_{1k}-Summationshalbebene beschäftigen, wobei mit R_{1k} das Verfahren der typischen Rieszschen Mittel bezeichnet ist. Da die Beweise hierzu wieder auf einer gemeinsamen Grundlage beruhen, ist nur der erste Fall ausführlich behandelt [1]).

§ 1.

1.1. In diesem Paragraphen betrachten wir das Verhalten von Potenzreihen am Rande der Summationsgebiete, die zu den Verfahren von Cesàro und Euler-Knopp, sowie zum S_α-Verfahren gehören. Als Vorbereitung beweisen wir den

Hilfssatz 1. *Für $k \geqq 0$ und $q > -1$ ist längs aller im Einheitskreis an $z = 1$ heranführenden Wege*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^q \binom{n+k}{n} z^n \cong \frac{\Gamma(1+k+q)}{\Gamma(1+k)} \frac{1}{(1-z)^{1+k+q}}. \tag{1.1}$$

Beweis. Für $\gamma > -1$ und $n \to \infty$ folgt aus der Stirlingschen Formel

$$\binom{n+\gamma}{n} = \frac{n^\gamma}{\Gamma(1+\gamma)} + \sum_{r=1}^{p} c_r n^{\gamma-r} + O(n^{\gamma-p-1}) \quad (p \geqq 0, \text{ ganz}^2)),$$

[1]) Die Anregung zu den Untersuchungen in **1.2.** und verschiedene Ratschläge bei der Durchführung der Arbeit wurden Verf. durch Herrn W. Meyer-König erteilt.

[2]) Für $p = 0$ hat man die leere Summe zu schreiben.

und hieraus durch Umkehrung

$$(1.2)\quad n^{\gamma} = \Gamma(1+\gamma)\binom{n+\gamma}{n} + \sum_{r=1}^{p} d_r \binom{n+\gamma-r}{n} + O(n^{\gamma-p-1}) \quad \left(\begin{matrix} p \geqq 0, \text{ ganz} \\ p < 1+\gamma \end{matrix}\right),$$

wobei c_r und d_r Konstante sind. Daher ist

$$(1.3)\quad n^{q}\binom{n+k}{n} = \frac{n^{k+q}}{\Gamma(1+k)} + \sum_{r=1}^{p} c_r n^{k+q-r} + O(n^{k+q-p-1}) \quad (p \geqq 0, \text{ ganz}).$$

Fall A: $k+q$ ganz. Für $p = 1+k+q$ bekommt man dann

$$n^{q}\binom{n+k}{n} = \frac{n^{k+q}}{\Gamma(1+k)} + \sum_{r=1}^{k+q} c_r n^{k+q-r} + \frac{c_{1+k+q}}{n} + \frac{A_n}{n^2},$$

wobei die Folge A_n für $n \to \infty$ beschränkt bleibt. Strebt nun $z \to 1$ im Einheitskreis, so läßt sich etwa durch geschlossene Darstellung der Funktion

$$\varphi_s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^s z^n \qquad (s \geqq 0, \text{ ganz})$$

folgern, daß

$$\lim_{z \to 1} (1-z)^{1+s} \sum_{n=1}^{\infty} n^s z^n = \Gamma(1+s)$$

ist. Weiter gilt für dieselbe Bewegung von z

$$\lim_{z \to 1} (1-z)^{1+k+q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = 0,$$

und schließlich hat die Beschränktheit der A_n zur Folge, daß auch

$$\lim_{z \to 1} (1-z)^{1+k+q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n z^n}{n^2} = 0$$

gilt, womit (1.1) bewiesen ist. Fall B: $k+q$ nicht ganz. Wählt man p in (1.3) so, daß $0 > k+q-p > -1$ ist, so folgt aus (1.2) und (1.3)

$$n^{q}\binom{n+k}{n} = \frac{\Gamma(1+k+q)}{\Gamma(1+k)}\binom{n+k+q}{n} + \sum_{r=1}^{p} e_r \binom{n+k+q-r}{n} + B_n n^{k+q-p-1},$$

wobei die e_r konstant und die B_n für $n \to \infty$ beschränkt sind. Strebt nun wieder $z \to 1$ im Einheitskreis, so gilt einerseits

$$\lim_{z \to 1} (1-z)^{1+s} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+s}{n} z^n = 1 \qquad (s > -1),$$

andererseits aber

$$\lim_{z \to 1} (1-z)^{1+k+q} \sum_{n=1}^{\infty} B_n n^{k+q-p-1} z^n = 0,$$

da $k+q-p-1 < -1$ ist und B_n beschränkt bleibt für $n \to \infty$. Damit ist (1.1) auch im Fall B bewiesen.

1.2. Vorgelegt sei eine Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

mit dem Konvergenzradius 1[3]). Als die k-ten CESÀRO-Mittel der Teilsummenfolge

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$$

bezeichnen wir

$$C_k(n; s_\nu) = \frac{S_n^{(k)}}{\binom{n+k}{n}} \quad \text{mit} \quad S_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+k-\nu}{n-\nu} a_\nu \qquad (k \geqq 0).$$

Es gilt dann der

Satz 1. *Es sei A eine komplexe Zahl; k, α und q seien reelle Konstanten mit $k \geqq 0$, $0 < \alpha \leqq 1$, $q > -1$. Für $n \to \infty$ sei $C_k(n; s_\nu) \cong A n^q$, genauer*

$$C_k(n; s_\nu) = A n^q + n^q o(n^{-(1-\alpha)(1+k+q)}) \qquad (n \to \infty). \tag{1.4}$$

Dann ist

$$f(z) \cong A \frac{\Gamma(1+k+q)}{\Gamma(1+k)} \frac{1}{(1-z)^{1+k+q}}, \tag{1.5}$$

wenn $z \to 1$ strebt innerhalb des Bereiches

$$\mathfrak{B}_1(\alpha, c): \quad 0 \leqq r \leqq 1 - c|\varphi|^{1/\alpha}; \quad \begin{cases} z = re^{i\varphi}, \\ c > 0, \text{ beliebig, fest}^4). \end{cases}$$

Beweis. Es ist

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu = (1-z)^{k+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} S_\nu^{(k)} z^\nu,$$

und (1.4) besagt, daß für $\nu \geqq 1$

$$S_\nu^{(k)} = A \binom{\nu+k}{\nu} \nu^q + \varepsilon_\nu \nu^{\alpha(1+k+q)-1}$$

ist, wobei $\varepsilon_\nu \to 0$ strebt für $\nu \to \infty$. Daher ist zu zeigen, daß

$$\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k+q)} (1-z)^{1+k+q} \sum_{\nu=0}^{\infty} S_\nu^{(k)} z^\nu = \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k+q)} (1-z)^{1+k+q} S_0^{(k)}$$

$$+ A \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k+q)} (1-z)^{1+k+q} \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{\nu+k}{\nu} \nu^q z^\nu \tag{1.6}$$

$$+ \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k+q)} (1-z)^{1+k+q} \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_\nu \nu^{\alpha(1+k+q)-1} z^\nu$$

---

[3]) Man beachte, daß die den verschiedenen Verfahren zugrundeliegenden Reihen jeweils verschiedenen Anfangsbedingungen unterliegen.

[4]) Da es nur wesentlich ist, wie sich $f(z)$ in der Umgebung von $z = 1$ verhält, kann als Variabilitätsbereich von φ ein beliebig kleines Intervall um $\varphi = 0$ verwendet werden, und der Weg, auf dem z im Einheitskreis gegen $z = 1$ rückt, braucht nur von einer Stelle an in $\mathfrak{B}_1(\alpha, c)$ gelegen zu sein. Entsprechendes gilt auch für spätere Fälle.

gegen A strebt, wenn sich z in der angegebenen Weise an $z = 1$ heranbewegt. Hierzu ist nach Hilfssatz 1 notwendig und hinreichend, daß der letzte Summand der rechten Seite von (1. 6) gegen Null strebt, wenn z in $\mathfrak{B}_1(\alpha, c)$ gegen $z = 1$ rückt. Bezeichnet aber z_n eine in $\mathfrak{B}_1(\alpha, c)$ gegen $z = 1$ strebende Punktfolge, so hat man dazu die Transformation der Nullfolge ε_ν mit Hilfe der Matrix

$$H = (h_{n\nu}) \tag{1. 7}$$

zu untersuchen; dabei wurde

$$h_{n\nu} = (1 - z_n)^{1+k+q}\, \nu^{\alpha(1+k+q)-1}\, z_n^\nu$$

gesetzt. Nach einem bekannten Satz von Toeplitz und Schur ist alles gezeigt, wenn die Zeilennormen dieser Matrix beschränkt sind und $\lim_{n \to \infty} h_{n\nu} = 0$ ist ($\nu = 1, 2, \ldots$). Letzteres ist unmittelbar zu sehen, so daß man noch die Beschränktheit der Zeilennormen zu zeigen hat:

$$|1 - z_n|^{1+k+q} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{\alpha(1+k+q)-1} |z_n|^\nu \leqq M \qquad (M \text{ konstant}).$$

Dies folgt aus der Abschätzung [5])

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{\alpha(1+k+q)-1} |z_n|^\nu \simeq \Gamma(\alpha(1 + k + q))\, (1 - |z_n|)^{-\alpha(1+k+q)} \qquad (|z_n| \to 1),$$

zusammen mit der Tatsache, daß mit einer von n unabhängigen Konstanten $P > 0$

$$|1 - z_n|\,(1 - |z_n|)^{-\alpha} \leqq P \tag{1. 8}$$

ist. Diese letztere Tatsache folgt so. In der Umgebung der kritischen Stelle $\varphi = 0$ gilt wegen

$$|1 - z_n| = \sqrt{1 + r_n^2 - 2 r_n \cos \varphi_n} \leqq \sqrt{1 + r_n^2 - 2 r_n \left(1 - \frac{\varphi_n^2}{2}\right)} = \sqrt{(1 - r_n)^2 + r_n \varphi_n^2}$$

die Beziehung

$$|1 - z_n|\,(1 - |z_n|)^{-\alpha} \leqq \sqrt{(1 - r_n)^{2(1-\alpha)} + r_n \left(\frac{\varphi_n}{(1 - r_n)^\alpha}\right)^2},$$

und da für die z_n aus $\mathfrak{B}_1(\alpha, c)$

$$1 - r_n > c\,|\varphi_n|^{1/\alpha}, \quad \text{also} \quad \left(\frac{\varphi_n}{(1 - r_n)^\alpha}\right)^2 < c^{-2\alpha}$$

gilt, ist (1. 8) und damit Satz 1 bewiesen.

Mehrere Sonderfälle von Satz 1 sind bereits bekannt.

1. Fall: $k = 0$, $q = 0$. Satz 1 liefert einen von W. Meyer-König angegebenen Abelschen Satz [6]).

---

[5]) Vgl. K. Knopp [9], S. 34; Ziffern in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

[6]) Vgl. W. Meyer-König [11], S. 574—575.

2. Fall: $q = 0$, $\alpha = 1$. Satz 1 deckt sich mit dem bekannten $C_k \to A$-Satz im Fall der Annäherung im Winkelraum [7]).

3. Fall: $q = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$. Der hierfür aus Satz 1 entstehende Stetigkeitssatz wurde von J. KARAMATA angegeben [8]).

1.3. Wir beschließen diese Untersuchungen über das C_k-Verfahren mit dem Hinweis auf zwei Zusätze, die sich durch geringe Abänderungen der Beweisführung ergeben; weiter soll noch die Voraussetzung (1.4) untersucht werden.

a. Wird in (1.4) statt der o-Bedingung die entsprechende O-Bedingung gesetzt, so bleibt Satz 1 wörtlich richtig, wenn man (1.5) durch

$$f(z) = O\left(\frac{1}{(1-z)^q}\right)$$

ersetzt. Entsprechendes gilt für spätere Sätze, dort wird jedoch nicht mehr darauf hingewiesen werden.

b. Für den Sonderfall $\alpha = 1$, d. h. Annäherung an $z = 1$ „im Winkelraum", gestattet Satz 1 eine Erweiterung.

Satz 1a. *Mit den Bezeichnungen von Satz 1 sei für zwei reelle Zahlen g und G mit* $-\infty < g \leqq G < +\infty$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{C_k(n; s_\nu)}{n^q} - \frac{G+g}{2} \right| \leqq \frac{G-g}{2} \quad (k \geqq 0,\ q > -1).$$

Dann ist

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k+q)} (1-z_n)^q f(z_n) - \frac{G+g}{2} \right| \leqq \delta \frac{G-g}{2},$$

wenn $z_n \to 1$ strebt „im Winkelraum" und daher $\left(\frac{|1-z_n|}{1-|z_n|}\right)^{1+k+q} \leqq \delta$ ist für eine geeignete Konstante $\delta > 0$.

In geometrischer Veranschaulichung besagt die Behauptung folgendes: Liegen sämtliche Häufungspunkte der Folge $\frac{C_k(n; s_\nu)}{n^q}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ in dem um $\frac{G+g}{2}$ mit Radius $\varrho = \frac{G-g}{2}$ geschlagenen abgeschlossenen Kreis, so liegen sämtliche Häufungspunkte der transformierten Folge $\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k+q)} (1-z_n)^q f(z_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ in dem um denselben Mittelpunkt mit Radius $\delta\varrho$ geschlagenen abgeschlossenen Kreis, wenn die Folge z_n in dem obigen Winkelraum gegen $z = 1$ strebt.

Setzt man in Satz 1a speziell $G = g$, so resultiert der Sonderfall $\alpha = 1$ des Satzes 1.

c. Wir beschäftigen uns mit der Voraussetzung (1.4) von Satz 1.

---

[7]) Vgl. z. B. K. KNOPP [10], S. 507.

[8]) Vgl. J. KARAMATA [6], S. 157, Fußnote 3.

Das angegebene Verhalten (1.5) *läßt sich unter der Voraussetzung* (1.4) *in keinem sich dem Einheitskreis stärker als* $\mathfrak{B}_1(\alpha, c)$ *anschmiegenden Bereich allgemein behaupten.*

Für $k = q = 0$ ist dies schon in [11] gezeigt; hier verläuft der Beweis analog. In einem sich dem Einheitskreis stärker als $\mathfrak{B}_1(\alpha, c)$ (α, c fest) anschmiegenden Bereich könnte man nämlich eine Punktfolge

$$z_n = r_n e^{i\varphi_n} = (1 - c_n |\varphi_n|^{1/\alpha})\, e^{i\varphi_n}$$

angeben, für die c_n und φ_n Nullfolgen sind für $n \to \infty$. Soll aber für diese Bewegung von z der letzte Summand in (1.6) gegen Null streben, welche Nullfolge ε_ν auch sei, so ist bekanntlich die Beschränktheit der Zeilennormen der Matrix (1.7) sogar notwendig. Somit ist alles gezeigt, wenn für die obige Punktfolge

$$|1 - z_n|^{1+k+q} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{\alpha(1+k+q)-1} |z_n|^\nu \sim \left(\frac{|1 - z_n|}{(1 - |z_n|)^\alpha}\right)^{1+k+q}$$

unbeschränkt ist für $n \to \infty$. Dies ist der Fall, wie man leicht erkennt.

1.4. Wir untersuchen jetzt die entsprechenden Fragen für das Euler-Knoppsche Verfahren. Ohne zusätzlichen Aufwand lassen sich jedoch die Resultate ganz allgemein bei Heranziehung der verallgemeinerten Eulerschen Reihentransformation im Sinne von K. Knopp [8] herleiten.

Sei

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \qquad (z = r e^{i\varphi}) \tag{1.9}$$

ein im Nullpunkt reguläres Funktionselement. Die Untersuchung von $f(z)$ in einem Punkt z_0 läßt sich wieder auf den Fall $z_0 = 1$ reduzieren. Dann kommt die E-Transformation von $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ in der folgenden Weise zustande. Die Funktion $z = E(y)$ der komplexen Variablen y erfülle die folgenden Bedingungen:

(1) Die Funktion $z = E(y)$ ist in $|y| \leqq 1$ regulär.

(2) Die Abbildung $z = E(y)$ ist für $|y| \leqq 1$ umkehrbar eindeutig, und das Bild von $|y| < 1$ in der z-Ebene ist eine erzeugende Figur $\mathfrak{G}$.

(3) Es ist $E(0) = 0$ und $E(1) = 1$.

Mit einer solchen Funktion $E(y)$ bilde man

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (E(y))^\nu,$$

ordne formal nach Potenzen von y um, was

$$\psi(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a'_\nu y^\nu$$

liefern möge, und setze hierin $y = 1$ ein. Wird nun wieder $s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$ gesetzt, so heißt (1. 9) für $z = 1$ mit Hilfe des E-Verfahrens summierbar zum Wert A, wenn

$$\lim_{n\to\infty} E(n; s_\nu) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} a'_\nu = A \tag{1.10}$$

gilt.

Setzen wir jetzt voraus, für ein genügend großes, festes s sei

$$t_n = \sum_{\nu=0}^{n} a'_\nu = O(n^s) \qquad (n \to \infty), \tag{1.11}$$

dann ist $\psi(y)$ in $|y| < 1$ regulär, und da $\psi(y) = f(E(y))$ ist für kleine $|y|$, so ist die Funktion $f(z)$ unter der Voraussetzung (1. 11) in $\mathfrak{G}$ regulär und gestattet dort die Darstellung

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a'_\nu (\bar{E}(z))^\nu, \tag{1.12}$$

wo $y = \bar{E}(z)$ die Umkehrfunktion zu $z = E(y)$ ist. Außerdem hat (1. 11) zur Folge, daß $z = 1$ entweder innerer Punkt oder Randpunkt des zu $f(z)$ und $E(y)$ gehörigen Mittag-Lefflerschen Sterns ist.

Statt $\lim_{n\to\infty} t_n$ wollen wir allgemeiner die C_k-Mittelbildung der Folge t_n, also den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} C_k E(n; s_\nu) = \lim_{n\to\infty} \frac{T_n^{(k)}}{\binom{n+k}{n}} \text{ mit } T_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+k-\nu}{n-\nu} a'_\nu \ (k \geqq 0)$$

betrachten. Bezeichnet man noch mit $\mathfrak{B}_E(\alpha, c)$ den Bereich der z-Ebene, der durch die Abbildung $z = E(y)$ aus dem in Satz 1 genannten Bereich $\mathfrak{B}_1(\alpha, c)$ der y-Ebene hervorgeht, so läßt sich der folgende Satz herleiten, der das asymptotische Verhalten von $f(z)$ bei Annäherung an den Randpunkt $z = 1$ des Mittag-Lefflerschen Sterns behandelt.

Satz 2. *Es sei A eine komplexe Zahl; k, α und q seien reelle Konstanten mit $k \geqq 0$, $0 < \alpha \leqq 1$, $q > -1$. Für $n \to \infty$ sei $C_k E(n; s_\nu) \cong A n^q$, genauer*

$$C_k E(n; s_\nu) = A n^q + n^q o\,(n^{-(1-\alpha)(1+k+q)}) \qquad (n \to \infty). \tag{1.13}$$

Dann ist

$$f(z) \cong A \frac{\Gamma(1+k+q)}{\Gamma(1+k)} \frac{1}{(1-\bar{E}(z))^q},$$

wenn $z \to 1$ strebt innerhalb des Bereichs $\mathfrak{B}_E(\alpha, c)$.

Zum Beweis hat man nur zu beachten, daß wegen (1. 12) in ganz $\mathfrak{G}$ die Darstellung

$$f(z) = (1-\bar{E}(z))^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{(k)} (\bar{E}(z))^n$$

gilt[9]), und daß $y = \bar{E}(z)$ in $\mathfrak{B}_1(\alpha, c)$ gegen $y = 1$ rückt, wenn z in $\mathfrak{B}_E(\alpha, c)$ gegen $z = 1$ strebt. Über die Voraussetzung (1. 13) gilt Entsprechendes wie in **1. 3. c.**

1. 5. Wir wollen noch die aus **1. 4.** durch Spezialisierung folgenden Ergebnisse für die klassischen EULER-KNOPPschen E_p-Verfahren angeben; weiter wird auf die entsprechenden Tatsachen beim S_α-Verfahren hingewiesen.

a. Für die EULER-KNOPPschen E_p-Verfahren hat man in **1. 4.**

$$E(y) \equiv E_p(y) = \frac{y}{2^p - (2^p - 1)\, y} \qquad (p > 0)$$

zu setzen, womit sich als erzeugendes Gebiet $\mathfrak{G}$ der Kreis

$$\mathfrak{K}_p\colon\ |z - a| < h \text{ mit } a = \frac{2^p - 1}{2^{p+1} - 1} \text{ und } h = \frac{2^p}{2^{p+1} - 1}$$

ergibt. Wie eine genaue Untersuchung der Abbildung von $|y| < 1$ durch $z = E_p(y)$ zeigt, verhält sich $\mathfrak{B}_{E_p}(\alpha, c)$ in der Umgebung von $z = 1$ wie

$$(1.\,14)\quad \mathfrak{B}_z(\alpha, \bar{c})\colon\ 0 \leqq \varrho \leqq h - \bar{c}\,|\psi|^{1/\alpha};\quad \begin{cases} z = a + \varrho e^{i\psi}, \\ \bar{c} > 0, \text{ beliebig, fest.} \end{cases}$$

Somit ergibt sich aus Satz 2 speziell für die E_p-Verfahren der

Satz 2a. *Es sei A eine komplexe Zahl; k, α, p und q seien reelle Konstanten mit $k \geqq 0$, $0 < \alpha \leqq 1$, $p > 0$, $q > -1$. Für $n \to \infty$ sei $C_k E_p(n; s_\nu) \cong A\, n^q$, genauer*

$$C_k E_p(n; s_\nu) = A\, n^q + n^q\, o\left(n^{-(1-\alpha)(1+k+q)}\right) \qquad (n \to \infty).$$

Dann ist

$$f(z) \cong A\, \frac{\Gamma(1 + k + q)}{\Gamma(1 + k)}\, 2^{p\,q}\, \frac{1}{(1 - z)^q},$$

wenn $z \to 1$ strebt innerhalb des durch (1. 14) *definierten Bereichs $\mathfrak{B}_z(\alpha, \bar{c})$.*

Zwei von K. KNOPP angegebene Stetigkeitssätze[10]) sind in Satz 2a für $\alpha = 1$ und $q = 0$ enthalten.

b. Das S_α-Verfahren wollen wir durch die Matrix

$$S_\alpha\colon\ (1 - \alpha)^{n+1} \binom{n + \nu}{\nu} \alpha^\nu \qquad \begin{matrix} (\alpha \text{ fest, } 0 < \alpha < 1; \\ n, \nu \geqq 0, \text{ ganz}) \end{matrix}$$

---

[9]) Die Bedingung (1. 11) ist nämlich erfüllt, wie man auf Grund der Umkehrformel $\tau_n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{k}{\nu} (-1)^\nu S^{(k)}_{n-\nu}$ für die C_k-Mittel $C_k(n; \tau_\nu) = \dfrac{S^{(k)}_n}{\binom{n+k}{n}}$ einer beliebigen Folge τ_n leicht feststellt.

[10]) Vgl. K. KNOPP [7], S. 127 und S. 155—156.

definieren [11]). Von der dem folgenden Satz 3 zugrundeliegenden Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu = (1-z) \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu z^\nu$$

verlangen wir:

(1) Das S_α-Verfahren sei auf die Folge s_n anwendbar [12]).

(2) Die Funktion $f(z)$ sei in $z = \alpha$ regulär.

Betrachtet man an Stelle der Folge $t_n = S_\alpha(n; s_\nu)$ allgemeiner deren C_k-Transformierte und benützt die Bezeichnungen

$$C_k S_\alpha(n; s_\nu) = \frac{T_n^{(k)}}{\binom{n+k}{n}} \quad \text{und} \quad T_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu+k-1}{n-\nu} t_\nu ,$$

so gelangt man auf ähnliche Weise wie in **1. 2.** und **1. 4.** zu

Satz 3. *Es sei A eine komplexe Zahl; α, β, k und q seien reelle Konstanten mit $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta \leqq 1$, $k \geqq 0$ und $q > -1$. Für $n \to \infty$ sei $C_k S_\alpha(n; s_\nu) \cong A n^q$, genauer*

$$C_k S_\alpha(n; s_\nu) = A n^q + n^q o(n^{-(1-\beta)(1+k+q)}) \qquad (n \to \infty) \tag{1.15}$$

Dann ist

$$f(z) \cong A \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^q \frac{\Gamma(1+k+q)}{\Gamma(1+q)} \frac{1}{(1-z)^q},$$

wenn $z \to 1$ strebt innerhalb des Bereichs

$$\mathfrak{B}_3(\beta, c)\colon\ 0 \leqq \varrho \leqq h - c|\psi|^{1/\beta}; \qquad \begin{cases} z = a + \varrho e^{i\psi} & , \ a = (2-\alpha)^{-1}, \\ c > 0, \text{ beliebig, fest,} & h = a(1-\alpha). \end{cases}$$

§ 2.

2. 1. Die Untersuchungen des § 2 beruhen auf dem folgenden

Hilfssatz 2. *Es sei $c(t)$ für alle $T > 0$ in $(0, T)$ eigentlich R-integrierbar und für ein festes $k > 0$*

$$C^{(k)}(\omega) = k \int_0^{\omega} c(t)(\omega - t)^{k-1} dt$$

gesetzt. Unter der Voraussetzung

$$C^{(k)}(\omega) = O(\omega^s) \qquad (\omega \to \infty),$$

---

[11]) Wegen einer ausführlichen Behandlung des S_α-Verfahrens vgl. W. Meyer-König [12], S. 272—304.

[12]) Daraus folgt notwendig die Regularität von $f(z)$ in $|z| < \alpha$, vgl. W. Meyer-König [12], S. 273; die in Satz 3 auftretende Bedingung (1. 15) hat dann weiterhin zur Folge, daß $f(z)$ in den Kreis $|z-a| < h$ ($a = (2-\alpha)^{-1}$; $h = a(1-\alpha)$) hinein analytisch fortsetzbar ist.

wobei s genügend groß, aber fest ist, existiert für $\Re(z) > 0$ der folgende Grenzwert, und es ist

$$\lim_{\omega \to \infty} \omega^{-k} \int_0^{\omega} c(t) \frac{d}{dt} \{ e^{-zt} (\omega - t)^k \} dt = - \frac{z^{(k+1)}}{\Gamma(k+1)} \int_0^{\infty} e^{-zt} C^{(k)}(t) dt .$$

Eine solche Umformung findet sich unter der stärkeren Voraussetzung $\lim_{\omega \to \infty} \omega^{-k} C^{(k)}(\omega) = A$ bei G. H. Hardy and M. Riesz [4], S. 40 ff. Die dort verwandte Methode führt auch hier zum Ziel, daher kann auf den Beweis von Hilfssatz 2 verzichtet werden.

Durch partielle Integration folgt aus Hilfssatz 2 leicht der

Hilfssatz 3. *Es sei $a(t)$ für alle $T > 0$ in $(0, T)$ eigentlich R-integrierbar und für ein festes $k \geqq 0$*

$$A^{(k)}(\omega, z) = \int_0^{\omega} e^{-zt} a(t) (\omega - t)^k dt$$

gesetzt. Unter der Voraussetzung

$$A^{(k)}(\omega, 0) = O(\omega^s) \qquad (\omega \to \infty), \tag{2.1}$$

wobei s genügend groß, aber fest ist, existiert für $\Re(z) > 0$ der folgende Grenzwert, und es ist

$$\lim_{\omega \to \infty} \omega^{-k} A^{(k)}(\omega, z) = \frac{z^{k+1}}{\Gamma(k+1)} \int_0^{\infty} e^{-zt} A^{(k)}(t, 0) dt .$$

2.2. Wir sind nun in der Lage, die Fragen in Angriff zu nehmen, die das Verhalten von Potenzreihen am Rande des Borelschen Summationsgebietes betreffen[13]). Vorgelegt sei das im Nullpunkt reguläre Funktionselement

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \qquad (z = r e^{i\varphi}); \tag{2.2}$$

wir wollen es wieder so normiert denken, daß $z = 1$ der fragliche Randpunkt wird. Von den verschiedenen Variationen des Borelschen Verfahrens zur Summierung von $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ werden wir die folgende benützen.

Der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ wird die ganze Funktion

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu!} x^\nu$$

[13]) Vgl. Encyklopädie [1], S. 453—455.

zugeordnet, für $y \geqq 0$ die neue Funktion

$$F(y) = \int_0^y e^{-x} \Phi(x)\, dx$$

gebildet, und (2.2) heißt B-summierbar im Punkt $z = 1$, wenn

$$\lim_{y \to \infty} F(y) = \int_0^\infty e^{-x} \Phi(x)\, dx \tag{2.3}$$

existiert; der Grenzwert heißt dann die B-$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$. Betrachtet man statt (2.3) allgemeiner die funktionale C_k-Mittelbildung davon, so erhält man ein kombiniertes $C_k B$-Verfahren [14]).

Dabei heißt die Funktion

$$A(t) = \int_0^t a(\tau)\, d\tau$$

(für $t \to \infty$) C_k-limitierbar zum Wert A, wenn

$$\lim_{\omega \to \infty} C_k(\omega; A(t)) = \begin{cases} \lim\limits_{\omega \to \infty} k\, \omega^{-k} \int\limits_0^\omega A(t)\, (\omega - t)^{k-1}\, dt & (k > 0) \\ \lim\limits_{\omega \to \infty} A(\omega) & (k = 0) \end{cases} = A \tag{2.4}$$

ist. Verlangt man von der Funktion $a(\tau)$, daß sie in $\tau > 0$ definiert und für alle $T > 0$ in $(0, T)$ eigentlich R-integrierbar sei, so kann man statt (2.4) einheitlich

$$\lim_{\omega \to \infty} \omega^{-k} \int_0^\omega a(t)\, (\omega - t)^k\, dt = A \qquad (k \geqq 0) \tag{2.5}$$

schreiben [15]). Da aber $\Phi(x)$ eine ganze Funktion von x ist, kann man zur C_k-Limitierung von $F(y)$ in (2.3) diese Form (2.5) benützen; man hat also die Existenz des Grenzwerts

$$\lim_{\omega \to \infty} C_k B(\omega; s_\nu) = \lim_{\omega \to \infty} \omega^{-k} \int_0^\omega e^{-t} \Phi(t)\, (\omega - t)^k\, dt = \lim_{\omega \to \infty} \omega^{-k} S^{(k)}(\omega) \tag{2.6}$$

zu untersuchen. Dabei wurde

$$S^{(k)}(\omega) = \int_0^\omega e^{-t} \Phi(t)\, (\omega - t)^k\, dt$$

---

[14]) Eine Kombination der Verfahren von Cesaro und Borel betrachtete zuerst G. Doetsch, vgl. [2].

[15]) Die Integrationsreihenfolge ist vertauschbar, vgl. etwa E. W. Hobson [5], S. 339.

gesetzt. Existiert der Grenzwert (2.6) und ist gleich A, so sagen wir, es sei

$$C_k B\text{-}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = A.$$

Unter Benützung dieser Bezeichnungen beweisen wir zunächst einen Darstellungssatz [16]).

Satz 4. *Für genügend großes, festes s und ein $k \geqq 0$ sei*

$$S^{(k)}(\omega) = O(\omega^s) \qquad (\omega \to \infty). \tag{2.7}$$

Dann gilt:

(1) *Für alle reellen z mit $0 < z < 1$ existiert*

$$C_k B\text{-}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu.$$

(2) *Die durch (2.2) am Nullpunkt dargestellte Funktion $f(z)$ ist in dem über der Strecke $(0, 1)$ als Durchmesser geschlagenen Kreis $\mathfrak{K}$ regulär und läßt dort die Darstellung zu*

$$f(z) = \frac{1}{\Gamma(k+1)} \frac{1}{z} \left(\frac{1}{z} - 1\right)^{k+1} \int_0^\infty e^{-t\left(\frac{1}{z}-1\right)} S^{(k)}(t)\, dt. \tag{2.8}$$

Beweis zu (1). Nach (2.6) ist

$$\lim_{\omega \to \infty} \omega^{-k} \int_0^\omega e^{-t} \Phi(tz) (\omega - t)^k\, dt$$

$$= \frac{1}{z} \lim_{w \to \infty} w^{-k} \int_0^w e^{-t\left(\frac{1}{z}-1\right)} \{e^{-t} \Phi(t)\} (w - t)^k\, dt \tag{2.9}$$

zu untersuchen, wobei auf der rechten Seite ωz durch w ersetzt wurde. Setzt man in Hilfssatz 3

$$a(t) = e^{-t} \Phi(t),$$

so ist wegen (2.7) gerade die dortige Voraussetzung (2.1) erfüllt. Also existiert der Grenzwert (2.9), und es ist

$$C_k B\text{-}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu = \frac{1}{\Gamma(k+1)} \frac{1}{z} \left(\frac{1}{z} - 1\right)^{k+1} \int_0^\infty e^{-t\left(\frac{1}{z}-1\right)} S^{(k)}(t)\, dt,$$

denn für die genannten z ist ja $\left(\frac{1}{z} - 1\right) > 0$.

Beweis zu (2). Wir betrachten die Funktion

$$\psi(z) = \frac{1}{\Gamma(k+1)} \frac{1}{z} \left(\frac{1}{z} - 1\right)^{k+1} \int_0^\infty e^{-t\left(\frac{1}{z}-1\right)} S^{(k)}(t)\, dt,$$

[16]) Eine ähnliche Darstellungsformel für LAPLACE-Integrale gibt G. DOETSCH an [3].

die wegen (1) zunächst für alle reellen z mit $0 < z < 1$ erklärt ist und dort die $C_k B$-$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ liefert. Unser $C_k B$-Verfahren ist aber permanent, so daß $\psi(z)$ in den Punkten der Strecke (0, 1), die innerhalb des Konvergenzkreises von $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ liegen, mit $f(z)$ übereinstimmt. Nach dem Identitätssatz braucht also nur noch gezeigt zu werden, daß $\psi(z)$ eine in $\mathfrak{R}$ reguläre Funktion definiert. Hierzu genügt es, die Regularität von

$$I(z) = \int_0^\infty e^{-t\left(\frac{1}{z}-1\right)} S^{(k)}(t)\, dt$$

in jedem abgeschlossenen Teilbereich $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{R}$ darzutun. Für einen solchen Teilbereich läßt sich aber ein $\varepsilon > 0$ finden, so daß in ganz $\mathfrak{T}$

$$\Re\left(\frac{1}{z}-1\right) \geqq \varepsilon$$

gilt. Dann ist aber die Folge in $\mathfrak{T}$ analytischer Funktionen

$$I_n(z) = \int_0^n e^{-t\left(\frac{1}{z}-1\right)} S^{(k)}(t)\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

dort auch gleichmäßig konvergent, denn wenn etwa

$$|S^{(k)}(t)| \leqq M t^q \qquad (M \text{ konstant})$$

ist, so ist für $m > n \geqq 1$ und alle z aus $\mathfrak{T}$

$$|I_m(z) - I_n(z)| \leqq M \int_n^m e^{-\varepsilon t} t^q\, dt\,.$$

Nach dem Weierstrassschen Doppelreihensatz ist daher $I(z)$ in $\mathfrak{R}$ regulär, womit der Beweis von Satz 4 vollendet ist.

Wir fügen noch zwei Bemerkungen an.

a. Aus der Regularität von $f(z)$ in $\mathfrak{R}$ folgt nach der Konstruktion des Borelschen Summationsgebietes, daß unter der Voraussetzung (2.7) der Punkt $z = 1$ notwendig innerer Punkt oder Randpunkt desselben ist. Daher kann man in Satz 4 (1) statt „$C_k B$“ auch nur „B“ schreiben.

b. Im Falle der $C_k B$-Summierbarkeit von $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ ist (2.7) gewiß erfüllt; das bedeutet, daß die Ausgangsreihe (2.2) durch das $C_k B$-Verfahren in keinem Punkt außerhalb ihres Borelschen Summationsgebietes summiert werden kann.

2.3. In Analogie zu den Sätzen 1 bis 3 beweisen wir jetzt den

Satz 5. *Es sei A eine komplexe Zahl; k, α und q seien reelle Konstanten mit $k \geqq 0$, $0 < \alpha \leqq 1$, $q > -1$. Für $\omega \to \infty$ sei $C_k B(\omega; s_\nu) \cong A\,\omega^q$, genauer*

$$C_k B(\omega; s_\nu) = A\,\omega^q + \omega^q\, o\left(\omega^{-(1-\alpha)(1+k+q)}\right) \qquad (\omega \to \infty). \tag{2.10}$$

Dann ist

$$f(z) \cong A \frac{\Gamma(1+k+q)}{\Gamma(1+k)} \frac{1}{(1-z)^q},$$

wenn $z \to 1$ *strebt innerhalb des Bereichs*

$$\mathfrak{B}_4(\alpha, c): \quad 0 \leqq \varrho \leqq \tfrac{1}{2} - c|\psi|^{1/\alpha}; \quad \begin{cases} z = \frac{1}{2} + \varrho e^{i\psi}, \\ c > 0, \text{ beliebig, fest}. \end{cases}$$

Beweis. Wir benutzen die Darstellung (2. 8) von $f(z)$. Da wegen (2. 10)

$$S^{(k)}(t) = A t^{k+q} + \varepsilon(t) t^{\alpha(1+k+q)-1}$$

mit $\varepsilon(t) \to 0$ für $t \to \infty$ ist, bekommt man

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z).$$

Dabei ist

$$f_1(z) = \frac{A}{\Gamma(1+k)} \frac{1}{z} \left(\frac{1}{z} - 1\right)^{k+1} \int_0^\infty e^{-t\left(\frac{1}{z}-1\right)} t^{k+q} dt \cong A \frac{\Gamma(1+k+q)}{\Gamma(1+k)} \frac{1}{(1-z)^q},$$

wenn z irgendwie in $\mathfrak{K}$ gegen $z = 1$ strebt. Beschränkt man nun z auf den Teilbereich $\mathfrak{B}_4(\alpha, c)$ von $\mathfrak{K}$, so gilt ferner

$$\lim_{z \to 1} (1-z)^q f_2(z)$$

$$= \lim_{z \to 1} (1-z)^q \frac{1}{\Gamma(1+k)} \frac{1}{z} \left(\frac{1}{z} - 1\right)^{k+1} \int_0^\infty e^{-t\left(\frac{1}{z}-1\right)} t^{\alpha(1+k+q)-1} \varepsilon(t) dt = 0.$$

Denn nach einem bekannten Satz hat man dazu für die Integraltransformation mit Hilfe der Vermittlungsfunktion

$$V(z, t) = (1-z)^{1+k+q} e^{-t\left(\frac{1}{z}-1\right)} t^{\alpha(1+k+q)-1}$$

festzustellen: (a) Für jedes feste $a > 0$ und $z \to 1$ in $\mathfrak{B}_4(\alpha, c)$ ist

$$\lim_{z \to 1} \int_0^a |V(z, t)| dt \leqq \lim_{z \to 1} |1-z|^{1+k+q} \int_0^a t^{\alpha(1+k+q)-1} dt = 0.$$

(b) Die Zeilennormen bleiben beschränkt, wenn z in $\mathfrak{B}_4(\alpha, c)$ gegen $z = 1$ strebt. Man hat nämlich

$$\int_0^\infty |V(z, t)| dt = |1-z|^{1+k+q} \int_0^\infty e^{-t\,\Re\left(\frac{1}{z}-1\right)} t^{\alpha(1+k+q)-1} dt$$

$$= \Gamma(\alpha(1+k+q)) \left[\frac{|1-z|}{\left\{\Re\left(\frac{1}{z}-1\right)\right\}^\alpha}\right]^{1+k+q}$$

so daß noch zu zeigen ist, daß der Ausdruck

$$|1-z| \left\{\Re\left(\frac{1}{z}-1\right)\right\}^{-\alpha}$$

für alle z aus $\mathfrak{B}_4(\alpha, c)$ beschränkt ist. Dies ergibt sich ähnlich wie (1. 8) in **1. 2.** Über die Voraussetzung des Satzes 5 und des folgenden Satzes 6 gilt entsprechendes wie in **1. 3.** c.

2. 4. Wir wollen uns nun mit der Übertragung der seither für Potenzreihen gewonnenen Resultate auf DIRICHLETsche Reihen beschäftigen. Es sei also die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu z} \qquad \begin{pmatrix} z = \sigma + i\tau;\ \sigma, \tau \text{ reell}, \\ 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots \end{pmatrix} \tag{2. 11}$$

vorgelegt, die nicht notwendig eine endliche Konvergenzabzisse zu besitzen braucht. An die Stelle der C_k-Summierung bei Potenzreihen lassen wir die Summierung nach den RIESZschen Mitteln treten [17]. Man geht dabei so vor [18].

Zu der Ausgangsreihe (2. 11) bilde man die Hilfsfunktionen

$$s(t, z) = \begin{cases} s_n(z) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu e^{-\lambda_\nu z} & \text{für } \lambda_n < t \leqq \lambda_{n+1}, \\ 0 & \text{für } 0 < t \leqq \lambda_1, \end{cases}$$

$$C^{(k)}(\omega, z) = \begin{cases} k \int_0^\omega s(t, z)(\omega - t)^{k-1}\, dt & \text{für } k > 0, \\ s(\omega, z) & \text{für } k = 0. \end{cases} \tag{2. 12}$$

Die vorgelegte Reihe (2. 11) heißt dann $R_{\lambda k}$-summierbar zum Wert A, wenn für festes $k \geqq 0$

$$\lim_{\omega \to \infty} R_{\lambda k}(\omega; s_\nu(z)) = \lim_{\omega \to \infty} \omega^{-k} C^{(k)}(\omega, z) = A$$

ist. Hilfssatz 2 liefert zunächst wieder einen Darstellungssatz.

Ist mit der Bezeichnung (2. 12) *für genügend großes, festes* s *und ein* $k \geqq 0$

$$C^{(k)}(\omega, 0) = O(\omega^s) \qquad (\omega \to \infty), \tag{2. 13}$$

dann existiert für $\sigma > 0$ *die* $R_{\lambda k}$-$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu z}$ *und es ist dort*

$$R_{\lambda k}\text{-}\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu z} = \frac{z^{k+1}}{\Gamma(k+1)} \int_0^\infty C^{(k)}(t, 0)\, e^{-zt}\, dt. \tag{2. 14}$$

---

[17]) Der zum $C_1 \to A$-Satz bei Potenzreihen analoge Satz für DIRICHLETsche Reihen ist falsch: Wäre die durch $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu e^{-\nu! z}$ in $\Re(z) > 0$ dargestellte Funktion für $z \to +0$ stetig, so wäre die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu$ nach dem „High Indices Theorem" nicht nur C_1-summierbar, sondern sogar konvergent, was offenbar falsch ist.

[18]) Vgl. G. H. HARDY and M. RIESZ [4], S. 21 ff.

Der Beweis folgt für $k = 0$ in einfacher Weise durch Abelsche partielle Summation. Für $k > 0$ benütze man die leicht zu verifizierende Relation [19])

$$C^{(k)}(\omega, z) = k \int_0^\omega s(t, z)\,(\omega - t)^{k-1}\,dt = -\int_0^\omega s(t, 0)\,\frac{d}{dt}\{e^{-zt}(\omega - t)^k\}\,dt$$

und setze in Hilfssatz 2 speziell $c(t) = s(t, 0)$.

Man sieht leicht ein, daß die unter der Voraussetzung (2. 13) für $\sigma > 0$ durch (2. 14) dargestellte Funktion $f(z)$ dort regulär ist. Ähnlich wie Satz 5 findet man

Satz 6. *Es sei A eine komplexe Zahl; k, α und q seien reelle Konstanten mit $k \geqq 0$, $0 < \alpha \leqq 1$, $q > -1$. Für $\omega \to \infty$ sei $R_{1k}(\omega; s_\nu) \cong A\,\omega^q$ [20]), genauer*

$$R_{1k}(\omega; s_\nu) = A\,\omega^q + \omega^q\,o(\omega^{-(1-\alpha)(1+k+q)}) \qquad (\omega \to \infty).$$

Dann ist

$$f(z) \cong A\,\frac{\Gamma(1+k+q)}{\Gamma(1+k)}\,\frac{1}{z^q},$$

wenn $z \to 0$ strebt innerhalb des Bereichs

$$\mathfrak{B}_5(\alpha, c): \quad 0 \leqq |\tau| \leqq c\sigma^\alpha; \quad \begin{cases} \sigma > 0, \\ c > 0, \text{ beliebig, fest.} \end{cases}$$

Zwei Sonderfälle des Satzes 6 sind bereits bekannt.

a. $q = 0$, $\alpha = 1$: Dieser Stetigkeitssatz für Winkelraumannäherung an $z = 0$ wurde von Hardy-Riesz angegeben [21]).

b. $k = q = 0$: Satz 6 liefert einen von W. Meyer-König angegebenen Abelschen Satz [22]).

Die Untersuchungen in **2. 4.** lassen eine Übertragung auf Laplace-Integrale zu.

---

[19]) Vgl. G. H. Hardy und M. Riesz [4], S. 21 und 40.

[20]) Es wurde $s_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$ gesetzt.

[21]) Vgl. G. H. Hardy and M. Riesz [4], S. 44.

[22]) Vgl. W. Meyer-König [11], S. 573.

Literaturverzeichnis.

L. Bieberbach.

[1] Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variablen, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band **II, 3, 1** (1909—1921), S. 379—532.

G. Doetsch.

[2] Eine neue Verallgemeinerung der Borelschen Summabilitätstheorie, Dissertation Göttingen (1920).

[3] Unveröffentlichtes Manuskript, vgl. Fiat Review of German Science, Pure Mathematics, Part II, Wiesbaden 1948, S. 107.

G. H. Hardy and M. Riesz.

[4] The general Theory of Dirichlet's Series, Cambridge 1915.

E. W. Hobson.

[5] The Theory of Functions of a real Variable and the Theory of Fourier's Series, Vol. 2, Cambridge 1926.

J. Karamata.

[6] Über die B-Limitierbarkeit einer Potenzreihe am Rande, Mathemat. Zeitschr. **44** (1939), S. 156—160.

K. Knopp.

[7] Über das Eulersche Summierungsverfahren (II. Mitteilung), Mathemat. Zeitschr. **18** (1923), S. 125—156.

[8] Über Polynomentwicklungen im Mittag-Lefflerschen Stern durch Anwendung der Eulerschen Reihentransformation, Acta math. **47** (1926), S. 313—335.

[9] Aufgabensammlung zur Funktionentheorie II, 3. Auflage, Berlin 1944.

[10] Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 4. Auflage, Berlin und Heidelberg 1947.

W. Meyer-König.

[11] Abelsche Sätze für Dirichletsche Reihen, Math. Zeitschr. **46** (1940), S. 571—590.

[12] Untersuchungen über einige verwandte Limitierungsverfahren, Math. Zeitschr. **52** (1949), S. 257—304.

(Eingegangen am 13. Mai 1950.)

Mathematische Zeitschrift, Band 53, Heft 4, S. 309—339 (1950).

Zur Konvergenztheorie der Fourier-Reihen.

Von

W. Jurkat in Tübingen.

Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit mit Kriterien für die Konvergenz von FOURIER-Reihen bzw. deren Summierbarkeit durch RIESZsche Mittel. Neben den FOURIER-Reihen betrachten wir dabei stets auch die konjugierten Reihen. In § 1 widmen wir uns der Verallgemeinerung eines Satzes von WANG [14] und kommen so zu notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Summierbarkeit bei beliebiger Ordnung. (Eine schwache Stetigkeitsvoraussetzung läßt sich allerdings nicht vermeiden!) Mit Hilfe eines TAUBER'schen Satzes ergeben sich sofort gewisse Konvergenzkriterien, die fortan im Vordergrund des Interesses stehen: Es handelt sich dabei um einen Typ, der zum ersten Mal bei HARDY-LITTLEWOOD [6], [7] vorkommt. In § 2 geben wir allgemeine hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit eines solchen Kriteriums an, während § 3 durch Gegenbeispiele die Notwendigkeit dieser Bedingungen belegt. Anwendungen und Beispiele zeigen die vielfachen Möglichkeiten zu konkreten Kriterien zu gelangen. Hier ist besonders zu erwähnen der Spezialfall $k = 0$ in § 2. 3. 1, der als einfache und naturgemäße Verallgemeinerung der Ergebnisse von HARDY-LITTLEWOOD anzusehen ist. Bei den Gegenbeispielen ist Satz 1 hervorzuheben.

§ 1.

Riesz'sche Mittel.

Es sei $\lambda(\omega)$ eine stetige Funktion, $\lambda(\omega) \geqq 0$, die für $\omega \to \infty$ monoton gegen $+\infty$ strebt.

Eine Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \tag{1}$$

heißt dann $R(\lambda, \varkappa)$ [1]) summierbar, $\varkappa \geqq 0$, zur Summe C, wenn

$$C_\varkappa(\omega) = \sum_{\nu < \omega} (\lambda(\omega) - \lambda(\nu))^\varkappa c_\nu \cong C \cdot \lambda^\varkappa(\omega)^{2})$$

ist für $\omega \to \infty$.

[1]) Genauer: Summierbar durch das Verfahren der RIESZ'schen Mittel vom Typus λ und der Ordnung $\varkappa$.

[2]) Gemeint ist: $C_\varkappa(\omega)/\lambda^\varkappa(\omega) \to C$ $(\omega \to \infty)$.

Ist die Reihe (1) $R(\lambda, \varkappa)$ summierbar zur Summe C, so ist sie auch $R(\lambda, \varkappa')$ summierbar, $\varkappa' \geqq \varkappa$, zur gleichen Summe. Von HARDY [4] (vgl. auch ANANDA RAU [1], [2]) wurde folgender Umkehrsatz für das Verfahren bewiesen:

Satz T: *Ist die Reihe* (1) $R(\lambda, \varkappa)$ *summierbar,* $\varkappa > 0$, *und gilt*

$$(T) \qquad c_n = O_L\left(\frac{\lambda(n) - \lambda(n-1)}{\lambda(n)}\right), \quad \lambda(n) \simeq \lambda(n-1),$$

so ist die Reihe (1) *konvergent*[3]).

Im folgenden nehmen wir an[4]):

(1^0) $\lambda(\omega)$ ist totalstetig, $\lambda(\omega) \geqq 0$,

(2^0) $\frac{\lambda(\omega)}{\lambda'(\omega)} = \Lambda(\omega) \nearrow +\infty$ $(\omega \to \infty)$, (3^0) $\lambda'(\omega) = \frac{\lambda(\omega)}{\Lambda(\omega)} \nearrow$ $(\omega \to \infty)$.

Hinreichende Bedingungen für (3^0) sind

(3^*) $\Lambda(\omega)$ ist totalstetig, $\Lambda'(\omega) \leqq 1$ $(\omega \to \infty)$

bzw.

(3^{**}) $1 \leqq \frac{\omega}{\Lambda(\omega)} \nearrow$ $(\omega \to \infty)$.

Aus (3^*) folgt nämlich $\frac{\lambda'(\omega)}{\lambda(\omega)} \geqq \frac{\Lambda'(\omega)}{\Lambda(\omega)}$, während (3^{**}) die Monotonie von $\frac{\lambda(\omega)}{\omega}$ und von $\frac{\omega}{\Lambda(\omega)}$ sichert.

Da es für das Limitierungsverfahren nur auf die Werte von $\lambda(\omega)$ bzw. $\Lambda(\omega)$ für große ω ankommt, kann man o. B. d. A. (2^0) und (3^0) schon von $\omega = 0$ an als erfüllt ansehen. Die Bedingung (T) des Umkehrsatzes ist unter diesen Voraussetzungen äquivalent mit

$$c_n = O_L\left(\frac{1}{\Lambda(n)}\right).$$

Es ist nämlich

$$\frac{\lambda(n) - \lambda(n-1)}{\lambda(n)} \simeq \frac{1}{\Lambda(n)},$$

wie man z. B. aus den drei folgenden Beziehungen ablesen kann[5]):

$$(2) \qquad \lambda(n) - \lambda(n-1) = \int_{n-1}^{n} \lambda'(x)\, dx \leqq \lambda'(n) = \frac{\lambda(n)}{\Lambda(n)} \qquad : (1^0), (3^0).$$

$$\frac{\lambda(n) - \lambda(n-1)}{\lambda(n)} = 1 - \exp \log \frac{\lambda(n-1)}{\lambda(n)} \simeq \log \frac{\lambda(n)}{\lambda(n-1)} \qquad : (2), (2^0),$$

$$\log \frac{\lambda(n)}{\lambda(n-1)} = \int_{n-1}^{n} \frac{d(x)}{\Lambda(x)} \geqq \frac{1}{\Lambda(n)} \qquad : (1^0), (2^0).$$

---

[3]) Bei (T) wird gefordert: Es gibt eine positive Konstante A, so daß für alle großen n $c_n > -A \cdot (\lambda(n) - \lambda(n-1))/\lambda(n)$ ist.

[4]) Das Zeichen „$\nearrow$" bedeutet „wächst monoton (im weiteren Sinne)", der Zusatz „$(\omega \to \infty)$" bedeutet „für alle großen ω".

[5]) Die Nummern hinter einem Doppelpunkt auf der rechten Seite bezeichnen die beim Beweis benutzten Formeln.

1. 1. Summierung der Fourier-Reihen.

Es sei $f(x)$ eine im Lebesgue'schen Sinne integrierbare Funktion mit der Periode 2π, ihre Fourier-Reihe sei

$$FR(f) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x,$$

die zu erwartende Summe heiße $s(x)$.

Weiter sei

$$\varphi(t) = \varphi(t, x) = \tfrac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)] - s(x), \tag{3}$$

$$\Phi(t) = \frac{1}{t}\int_0^t |\varphi(\tau)|\, d\tau. \tag{4}$$

Für die Fourier-Koeffizienten α_ν der Funktion $\varphi(t)$ gilt

$$\alpha_\nu = a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x \quad (\nu \geqq 1). \tag{5}$$

Satz 1: *Gilt* $(1^0) - (3^0)$, *weiter*

$$\Phi(t) = o(1) \quad (t \to 0), \tag{6}$$

so ist $FR(f)$ *genau dann* $R(\lambda, \varkappa)$ *summierbar,* $\varkappa > 0$, *an der Stelle* x *zur Summe* $s(x)$, *wenn*

$$\int_{\frac{1}{\Lambda(\omega)}}^{\frac{1}{\omega}} \varphi(t) \frac{\sin \omega t}{t}\, dt = o(1) \tag{7}$$

ist für $\omega \to \infty$.

Dieser Satz verallgemeinert ein Ergebnis von Wang [14], wo das Gleiche nur für $\varkappa \geqq 1$ behauptet ist und allein im Falle $\lambda(\omega) = e^{\omega^\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ auch für $0 < \varkappa < 1$ nachgewiesen wird.

Ein interessanter Spezialfall von Satz 1 ergibt sich für $\lambda(\omega) = \omega = \Lambda(\omega)$. Da dann das Verfahren $R(\lambda, \varkappa)$ dem $(C, \varkappa)$-Verfahren äquivalent ist, so erhält man den bekannten

Satz 2: *Die Fourier-Reihe von* $f(x)$ *ist überall* $(C, \varkappa)$ *summierbar,* $\varkappa > 0$, *zur Summe* $s(x)$, *wo* $\Phi(t)$ *gegen Null strebt, also fast überall mit* $s(x) = f(x)$.

Zwei leichte Folgerungen aus Satz 1 sind:

Satz 3: *Unter Voraussetzung von* $(1^0) - (3^0)$ *und* (6) *ist* (7) *insbesondere eine notwendige Bedingung für die Konvergenz der Fourier-Reihe von* $f(x)$.

(Als Summe kommt nach Satz 2 nur $s(x)$ in Frage.)

Satz 4: *Gilt* $(1^0) - (3^0)$, *weiter* (6), *und ist* $FR(f)$ *für irgendein positives* $\varkappa$ *an der Stelle* x $R(\lambda, \varkappa)$ *summierbar zur Summe* $s(x)$, *so gilt dasselbe für alle* $\varkappa > 0$.

Wir geben jetzt den Beweis von Satz 1, in dem die Teile des Beweises von WANG wiederzufinden sind, die auch für $0 < \varkappa < 1$ gültig bleiben.

Unter unseren Voraussetzungen über $\lambda(\omega)$ gilt für $\varkappa > 0$

$$C_\varkappa(\omega) = \int_0^\omega (\lambda(\omega) - \lambda(s))^\varkappa \, d\, C_0(s) \tag{8}$$

$$= \varkappa \int_0^\omega C_0(s)\, (\lambda(\omega) - \lambda(s))^{\varkappa-1} \lambda'(s)\, d\, s.$$

Da in unserem Falle

$$C_0(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \varphi(t)\, \frac{\sin s\, t}{t}\, d\, t + s(x) + o(1) \tag{9}$$

ist, so erhält man aus (8) nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge

$$C_\varkappa(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \varphi(t)\, E_\varkappa(\omega, t)\, d\, t + (s(x) + o(1))\, \lambda^\varkappa(\omega), \tag{10}$$

wobei

$$E_\varkappa(\omega, t) = \frac{\varkappa}{t} \int_0^\omega (\lambda(\omega) - \lambda(s))^{\varkappa-1} \lambda'(s) \sin t\, s\, d\, s \tag{11}$$

zu setzen ist.

Wir beweisen nun unsere Behauptung, indem wir die Beziehung

$$C_\varkappa(\omega) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{\lambda(\omega)}} \varphi(t)\, \frac{\sin \omega\, t}{t}\, d\, t \cdot \lambda^\varkappa(\omega) = (s(x) + o(1))\, \lambda^\varkappa(\omega) \tag{12}$$

nachweisen:

Zunächst findet man durch partielle Integration

$$E_\varkappa(\omega, t) = \int_0^\omega (\lambda(\omega) - \lambda(s))^\varkappa \cos t\, s\, d\, s$$

$$= \int_0^\omega \lambda^\varkappa(\omega) \left[1 + \sum_{\nu=1}^\infty (-1)^\nu \binom{\varkappa}{\nu} \left(\frac{\lambda(s)}{\lambda(\omega)}\right)^\nu\right] \cos t\, s\, d\, s$$

$$= \frac{\sin \omega\, t}{t} \cdot \lambda^\varkappa(\omega) + O(1) \sum_{\nu=1}^\infty \left|\binom{\varkappa}{\nu}\right| \lambda^{\varkappa-\nu}(\omega) \int_0^\omega \lambda^\nu(s)\, d\, s.$$

Da aber

$$\int_0^\omega \lambda^\nu(s)\, d\, s = O(1)\, \Lambda(\omega) \int_0^\omega \lambda^\nu(s)\, \frac{\lambda'(s)}{\lambda(s)}\, d\, s = O(1)\, \frac{\lambda^\nu(\omega)}{\nu}\, \Lambda(\omega) \qquad : (2^0)$$

ist, haben wir

$$E_\varkappa(\omega, t) - \frac{\sin \omega t}{t} \cdot \lambda^\varkappa(\omega) = O(1) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \left| \binom{\varkappa}{\nu} \right| \cdot \lambda^\varkappa(\omega) \cdot \Lambda(\omega) \tag{13}$$
$$= O(1) \cdot \Lambda(\omega) \cdot \lambda^\varkappa(\omega).$$

Wegen (13) und (10) ist die linke Seite von (12) gleich

$$O(1)\, \lambda^\varkappa(\omega)\, \Lambda(\omega) \int_0^{\frac{1}{\Lambda(\omega)}} |\varphi(t)|\, dt + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{1}{\Lambda(\omega)}}^{\pi} \varphi(t)\, E_\varkappa(\omega, t)\, dt + (s(x) + o(1))\, \lambda^\varkappa(\omega).$$

Hierin ist der erste Ausdruck bereits $o(1) \cdot \lambda^\varkappa(\omega)$ wegen (6), der zweite aber auch, weil für $E_\varkappa(\omega, t)$ die Abschätzung

$$E_\varkappa(\omega, t) = O(1) \frac{\lambda^\varkappa(\omega)}{\Lambda(\omega)} \cdot \frac{1}{t^2} + O(1) \cdot \frac{\lambda^\varkappa(\omega)}{\Lambda^\varkappa(\omega)} \cdot \frac{1}{t^{\varkappa+1}} \tag{14}$$

besteht. Man braucht nämlich nur zu berücksichtigen, daß aus (6) bekanntlich für jedes positive $\varkappa$

$$\frac{1}{\Lambda^\varkappa(\omega)} \int_{\frac{1}{\Lambda(\omega)}}^{\pi} \left| \frac{\varphi(t)}{t^{\varkappa+1}} \right| dt = o(1)$$

folgt.

Um also unsere Behauptung endgültig zu beweisen, genügt es, den Nachweis von (14) zu erbringen. Dies ist für $\varkappa \geqq 1$ sehr einfach; denn wendet man in (11) den zweiten Mittelwertsatz [6]) an, so erhält man

$$E_\varkappa(\omega, t) = \frac{\varkappa}{t} \lambda^{\varkappa-1}(\omega) \cdot \lambda'(\omega) \cdot \int \sin t s\, ds \tag{15}$$
$$= O(1) \cdot \lambda^{\varkappa-1}(\omega) \frac{\lambda(\omega)}{\Lambda(\omega)} \cdot \frac{1}{t^2} \quad [7]). \qquad : (3^0)$$

Schwieriger ist es im Falle $0 < \varkappa < 1$:

Zunächst setzen wir

$$E_\varkappa(\omega, t) = \frac{\varkappa}{t} \int_0^{\omega} (\lambda(\omega) - \lambda(s))^{\varkappa-1} \lambda'(s) \sin s t\, ds = \frac{\varkappa}{t} \int_0^{\omega_1} + \frac{\varkappa}{t} \int_{\omega_1}^{\omega}, \tag{16}$$

wobei ω_1 durch die Gleichung

$$\lambda(\omega) = 2\, \lambda(\omega_1) \tag{17}$$

[6]) Wir benutzen hier den zweiten Mittelwertsatz in der Form: Ist $f(x)$ monoton in $[a, b]$, $0 \leqq f(x) \leqq K$, und $g(x)$ integrierbar, so gilt

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = K \int_\alpha^\beta g(x)\, dx \qquad (a \leqq \alpha \leqq \beta \leqq b).$$

(Die Grenzen α, β beim Integral werden wir der Kürze halber öfter weglassen!)

[7]) Soweit ist der Beweis von Wang [14] übernommen.

bestimmt ist. Durch Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes erhält man dann

$$\int_0^{\omega_1} = (\lambda(\omega)-\lambda(\omega_1))^{\varkappa-1}\cdot\lambda'(\omega)\cdot\int \sin ts\, ds \qquad : (3^0)$$

$$= O(1)\,\lambda^{\varkappa-1}(\omega)\,\frac{\lambda(\omega)}{\Lambda(\omega)}\cdot\frac{1}{t}, \tag{18}$$

was zu dem ersten Ausdruck in (14) führt.

Um nun $\int_{\omega_1}^{\omega}$ abschätzen zu können, führen wir die Substitution $\sigma = \frac{\omega - s}{\Lambda(\omega)}$ durch

$$\int_{\omega_1}^{\omega} = \Lambda(\omega)\int_0^{\sigma_1}(\lambda(\omega)-\lambda(s))^{\varkappa-1}\lambda'(s)\sin(\omega-\Lambda(\omega)\sigma)\,t\,d\sigma \tag{19}$$

$$\left(\sigma_1 = \frac{\omega-\omega_1}{\Lambda(\omega)}\right).$$

Hierin ist

$$(\lambda(\omega)-\lambda(s))^{\varkappa-1}\lambda'(s) = \frac{\lambda^{\varkappa}(s)}{\Lambda(s)}\left(\frac{\lambda(\omega)}{\lambda(s)}-1\right)^{\varkappa-1}$$

$$= \lambda^{\varkappa}(s)\cdot\frac{1}{\Lambda(s)}\cdot\xi^{\varkappa-1}\cdot\sigma^{\varkappa-1}, \tag{20}$$

wobei

$$\xi = \eta\cdot\zeta,\quad \eta = \frac{\varrho}{\sigma},\quad \zeta = \frac{e^{\varrho}-1}{\varrho} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varrho^{\nu-1}}{\nu!},\quad \varrho = \log\frac{\lambda(\omega)}{\lambda(s)}$$

gesetzt ist. Die Funktion η ist mindestens gleich eins, denn es gilt die Darstellung

$$\eta = \frac{\Lambda(\omega)}{\omega-s}\int_s^{\omega}\frac{d(x)}{\Lambda(x)} \qquad : (2^0).$$

Ferner fällt η monoton mit wachsendem s, da $\eta'(s)$ abgesehen von einem positiven Faktor fast überall gleich

$$\int_s^{\omega}\frac{d(x)}{\Lambda(x)} - (\omega-s)\,\frac{1}{\Lambda(s)},$$

also $\leqq 0$ ist. Da neben η auch ξ dieselben beiden Eigenschaften besitzt, so gilt auch für ξ:

$$\xi \geqq 1\ (0\leqq s\leqq\omega), \tag{21}$$

$$\xi \searrow\ (s\nearrow). \tag{22}$$

In (20) hängen daher alle Faktoren der rechten Seite monoton von s und damit auch von σ ab. Wendet man jetzt in (19) den zweiten Mittelwertsatz an, so ergibt sich

$$\int_{\omega_1}^{\omega} = \Lambda(\omega)\cdot\lambda^{\varkappa}(\omega)\cdot\frac{1}{\Lambda(\omega_1)}\cdot 1\cdot\int\sigma^{\varkappa-1}\sin(\omega-\Lambda(\omega)\sigma)\,t\,d\sigma. \tag{23}$$

Weiter gilt

$$\frac{\Lambda(\omega)}{\Lambda(\omega_1)} \leqq \frac{\lambda(\omega)}{\lambda(\omega_1)} = 2 = O(1) \qquad : (3^0), (17) \tag{24}$$

und

$$\int \sigma^{\varkappa-1} \sin(\omega - \Lambda(\omega)\,\sigma)\, t\, d\sigma = O(1)\, \frac{1}{\Lambda^{\varkappa}(\omega)} \cdot \frac{1}{t^{\varkappa}}. \tag{25}$$

Letzteres ergibt sich etwa, indem man

$$\sin(\omega - \Lambda\sigma)\, t = \sin \omega t \cdot \cos \Lambda t \cdot \sigma - \cos \omega t \cdot \sin \Lambda t \cdot \sigma$$

schreibt und benutzt, daß die Integrale

$$\int_a^b \sigma^{\varkappa-1} \cos \Lambda t \cdot \sigma\, d\sigma \qquad \text{bzw.} \qquad \int_a^b \sigma^{\varkappa-1} \sin \Lambda t \cdot \sigma\, d\sigma$$

gleich $O(1) \cdot \left(\frac{1}{\Lambda(\omega)\, t}\right)^{\varkappa}$ sind gleichmäßig in a und b.

Aus (23) – (25) erhalten wir schließlich

$$\int_{\omega_1}^{\omega} = O(1)\, \frac{\lambda^{\varkappa}(\omega)}{\Lambda^{\varkappa}(\omega)} \cdot \frac{1}{t^{\varkappa}}, \tag{26}$$

was zu dem zweiten Ausdruck in (14) führt. Damit ist der Beweis vollendet.

1. 2. Summierung der konjugierten Reihen. Den in § 1. 1 durchgeführten Betrachtungen über FOURIER-Reihen entsprechen solche über konjugierte Reihen:

Die zu $FR(f)$ konjugierte Reihe sei

$$KR(f) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \cos \nu x - a_\nu \sin \nu x,$$

die zu erwartende Summe heiße $\bar{s}(x)$.

Weiter sei (ganz analog zu § 1. 1)

$$\psi(t) = \psi(t, x) = \tfrac{1}{2}\,[f(x+t) - f(x-t)], \tag{3'}$$

$$\Psi(t) = \frac{1}{t} \int_0^t |\psi(\tau)|\, d\tau. \tag{4'}$$

Für die FOURIER-Koeffizienten β_ν der Funktion $\psi(t)$ gilt

$$\beta_\nu = b_\nu \cos \nu x - a_\nu \sin \nu x \qquad (\nu \geqq 1). \tag{5'}$$

Satz 1': *Gilt* $(1^0) - (3^0)$, *weiter*

$$\Psi(t) = o(1) \qquad (t \to 0), \tag{6'}$$

so ist $KR(f)$ *genau dann* $R(\lambda, \varkappa)$ *summierbar,* $\varkappa > 0$, *an der Stelle* x

zur Summe $\bar{s}(x)$, *wenn*

$$(7') \qquad \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{\omega}}^{\frac{1}{\Lambda(\omega)}} \psi(t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}(1-\cos\omega t)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{\Lambda(\omega)}}^{\pi}\psi(t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,dt\to\bar{s}(x)$$

strebt für $\omega\to\infty$.

Satz 1″. *Gilt* $(1^0)-(3^0)$, *weiter* (6′) *und*

$$(6'') \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\psi(t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,dt=\bar{s}(x)\text{ [8]},$$

so ist $KR(f)$ *genau dann* $R(\lambda,\varkappa)$ *summierbar,* $\varkappa>0$, *an der Stelle* x *zur Summe* $\bar{s}(x)$, *wenn*

$$(7'') \qquad \int_{\frac{1}{\omega}}^{\frac{1}{\Lambda(\omega)}}\psi(t)\frac{\cos\omega t}{t}\,dt=o(1)$$

ist für $\omega\to\infty$.

Satz 1″ ist eine Folge von Satz 1′.

Einen interessanten Spezialfall von Satz 1′ erhält man für $\lambda(\omega)=\omega=\Lambda(\omega)$:

Satz 2′: *Unter der Voraussetzung* (6′) *ist* (6″) *die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß* $KR(f)$ *an der Stelle* x *zur Summe* $\bar{s}(x)$ $(C,\varkappa)$ *summierbar ist,* $\varkappa>0$. *Die Bedingungen* (6′) *und* (6″) *sind bekanntlich für fast alle* x *erfüllt.*

Zwei leichte Folgerungen aus Satz 1′ sind:

Satz 3′: *Unter Voraussetzung von* $(1^0)-(3^0)$ *und* (6′) *sind* (6″) *und* (7″) *notwendige Bedingungen für die Konvergenz von* $KR(f)$ *zur Summe* $\bar{s}(x)$.

Satz 4′: *Gilt* $(1^0)-(3^0)$, *weiter* (6′), *und ist* $KR(f)$ *für irgendein positives* x *an der Stelle* x $R(\lambda,\varkappa)$ *summierbar, so gilt dasselbe für alle* $\varkappa>0$.

Wir bringen jetzt den Beweis von Satz 1′, der sich ganz ähnlich wie bei Satz 1 führen läßt und darum hier nur kurz angedeutet wird:

Man hat im jetzigen Falle

$$(9') \qquad C_0(s)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\psi(t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}(1-\cos st)\,dt+o(1)$$

---

[8]) (6″) soll bedeuten: $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}\psi(t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,dt=\bar{s}(x)$. Wir werden solche uneigentlichen Integrale im folgenden nicht mehr von gewöhnlichen Lebesgue'schen Integralen unterscheiden.

und erhält somit aus (8)

$$(10') \qquad C_\varkappa(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \psi(t)\,\overline{E}_\varkappa(\omega, t)\,dt + o(1)\,\lambda^\varkappa(\omega)$$

mit

$$(11') \qquad \overline{E}_\varkappa(\omega, t) = \varkappa \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\int_0^\omega (\lambda(\omega) - \lambda(s))^{\varkappa-1}\,\lambda'(s)\,(1-\cos s\,t)\,ds.$$

Wir beweisen unsere Behauptung, indem wir die Beziehung

$$(12') \qquad C_\varkappa(\omega) - \left[\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{\Lambda(\omega)}} \psi(t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,(1-\cos\omega t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{\Lambda(\omega)}}^{a} \psi(t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,dt\right]\lambda^\varkappa(\omega) = o(1)\,\lambda^\varkappa(\omega)$$

nachweisen.

Wir dürfen o. B. d. A. $\lambda(0) = 0$ annehmen.

(12') ist nun eine einfache Folge der beiden Abschätzungen

$$(13') \qquad \overline{E}_\varkappa(\omega, t) - \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\cdot(1-\cos\omega t)\,\lambda^\varkappa(\omega) = O(1)\,\lambda^\varkappa(\omega)\,\Lambda(\omega)$$

und

$$(14') \qquad \overline{E}_\varkappa(\omega, t) - \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\cdot\lambda^\varkappa(\omega) = O(1)\frac{\lambda^\varkappa(\omega)}{\Lambda(\omega)}\cdot\frac{1}{t^2} + O(1)\frac{\lambda^\varkappa(\omega)}{\Lambda^\varkappa(\omega)}\cdot\frac{1}{t^{\varkappa+1}},$$

die man ganz ähnlich wie bei Satz 1 beweist.

§ 2.

Konvergenzkriterien.

Wir gehen jetzt zu Anwendungen auf Konvergenzkriterien über, die ja durch den TAUBER'schen Satz T sofort gegeben sind:

Es gelte

$$(1^0) \qquad \lambda(\omega) = \exp\int^\omega \frac{dx}{\Lambda(x)},$$

$$(2^0) \qquad \Lambda(\omega) \nearrow +\infty \qquad (\omega \to \infty),$$

$$(3^0) \qquad \frac{\lambda A(\omega)}{\Lambda(\omega)} \nearrow \quad (\omega \to \infty) \quad \text{für ein } A > 0.$$

Hinreichende Bedingungen für (3^0) sind

$$(3^*) \qquad \Lambda(\omega) \text{ ist totalstetig, } \Lambda'(\omega) = O(1) \quad (\omega \to \infty)$$

bzw.

$$(3^{**}) \qquad \frac{\omega}{\Lambda(\omega)} \nearrow \quad (\omega \to \infty).$$

Satz 1: *Gilt* $(1^0)-(3^0)$, *so folgt aus den Bedingungen* [9])

$$1\,(6) \qquad \Phi(t) = o(1) \quad (t \to 0),$$

$$1\,(7) \qquad \int_{\frac{1}{\omega}}^{\frac{1}{A(\omega)}} \varphi(t)\,\frac{\sin \omega t}{t}\,dt = o(1) \quad (\omega \to \infty)$$

und

$$(1) \qquad \alpha_n = O_L\left(\frac{1}{A(n)}\right) \quad (n \to \infty)$$

die Konvergenz von $FR(f)$ *an der Stelle* x *zur Summe* $s(x)$.

Satz 1′: *Gilt* $(1^0)-(3^0)$, *so folgt aus den Bedingungen*

$$1\,(6') \qquad \Psi(t) = o(1) \quad (t \to 0),$$

$$1\,(6'') \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \psi(t)\,\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,dt = \bar{s}(x),$$

$$1\,(7'') \qquad \int_{\frac{1}{\omega}}^{\frac{1}{A(\omega)}} \psi(t)\,\frac{\cos \omega t}{t}\,dt = o(1) \quad (\omega \to \infty)$$

und

$$(1') \qquad \beta_n = O_L\left(\frac{1}{A(n)}\right) \quad (n \to \infty)$$

die Konvergenz von $KR(f)$ *an der Stelle* x *zur Summe* $\bar{s}(x)$.

Zum Beweise brauchen wir nur zu bemerken, daß die Voraussetzungen ungeändert bleiben, wenn wir $A(\omega)$ durch $\frac{1}{A}A(\omega)$ ersetzen; das bedeutet aber für (3^0), daß man o. B. d. A. $A = 1$ setzen darf, so daß die Anwendung von Satz 1, 1 bzw. Satz 1, 1″ gesichert ist [10]), [11]).

Wir erwähnen, daß durch Satz 1 ein Konvergenzkriterium gegeben ist, daß auf jede konvergente Fourier-Reihe anwendbar ist, die der Bedingung 1 (6) genügt. Denn zu einer gegebenen Fourier-Reihe läßt sich stets eine Funktion $A(\omega)$ angeben, so daß (1) und $(1^0)-(3^0)$ erfüllt sind (vgl. § 2. 1, Hilfssatz 1). Konvergiert die Fourier-Reihe, so muß mit 1 (6) auch 1 (7) erfüllt sein (nach Satz 1, 3), d. h. Satz 1 ist anwendbar.

Entsprechendes gilt von Satz 1′.

---

[9]) Mit 1 (6) ist Formel (6) in § 1 gemeint; entsprechend in späteren Fällen.

[10]) Mit Satz 1, 1 ist Satz 1 in § 1 gemeint, entsprechend in späteren Fällen.

[11]) Satz 1, 1 wird hier nicht in vollem Umfang gebraucht! Man braucht nur zu wissen, daß aus 1 (6) und 1 (7) z. B. die $R(\lambda, 1)$-Summierbarkeit folgt — und das war leicht zu beweisen.

2. 1. Problemstellung, Hilfssätze. Wir betrachten jetzt Konvergenzkriterien, die aus einer Stetigkeitsvoraussetzung (s) bzw. (S) über die Funktion und einer gleichzeitigen Größenordnungsbeschränkung (O) für ihre FOURIER-Koeffizienten die Konvergenz (K) der FOURIER-Reihe (an der Stelle x zur Summe $s(x)$) erschließen. Die genannten Voraussetzungen sollen jeweils eine der folgenden Formen haben:

$$(s) \qquad \varphi(t) = o\left(\frac{1}{G\left(\frac{1}{t}\right)}\right) \quad \text{oder} \quad \Phi(t) = o\left(\frac{1}{G\left(\frac{1}{t}\right)}\right) \quad (t \to +0),$$

$$(S) \qquad \varphi(t) = O\left(\frac{1}{G\left(\frac{1}{t}\right)}\right) \quad \text{oder} \quad \Phi(t) = O\left(\frac{1}{G\left(\frac{1}{t}\right)}\right) \quad (t \to +0),$$

$$(O) \qquad \alpha_n = O\left(\frac{1}{\Lambda_n}\right) \quad \text{oder} \quad \alpha_n = O_L\left(\frac{1}{\Lambda_n}\right) \quad (n \to \infty).$$

Gefragt wird nach den genauen Bedingungen für die Gültigkeit solcher Kriterien (der Typ werde durch $(s, O \to K)$ bzw. $(S, O \to K)$ gekennzeichnet).

Kriterien von diesem Typ wurden zum ersten Mal von HARDY-LITTLEWOOD [6], [7] behandelt; ihre beiden Beweismethoden wurden später verschiedentlich verallgemeinert. Die eine besteht in einer direkten Abschätzung des DIRICHLETschen Integrals, vgl. hierzu GAGAEV [3]; die andere beruht auf der Anwendung eines Limitierungsverfahrens und führt wesentlich weiter, vgl. hierzu MORGAN [10], WANG [13], IYENGAR [8], [9] und SUNOUCHI [12].

Ehe wir nun die Lösung des oben gestellten Problemes geben — deren hinreichender Teil im wesentlichen schon in Satz 1 enthalten ist —, beweisen wir noch zwei Hilfssätze, die uns später mehrfach nützlich sein werden.

Hilfssatz 1: Zu jeder Zahlenfolge $\{\eta_n\}$,

$$(2) \qquad \eta_n \to +\infty \quad (n \to \infty),$$

läßt sich eine Funktion $\eta(x)$ angeben, die den folgenden Bedingungen genügt:

$$(3) \qquad \eta(n) \leqq \eta_n,$$

$$(4) \qquad \eta(x) \nearrow +\infty \quad (x \to \infty), \qquad (5) \qquad \frac{\xi(x)}{\eta(x)} \nearrow +\infty \quad (x \to \infty).$$

Dabei sei $\xi(x)$ eine Funktion mit der Eigenschaft

$$(6) \qquad \xi(x) \nearrow +\infty \quad (x \to \infty).$$

Zusatz. Ist $\xi(x)$ totalstetig, so kann auch $\eta(x)$ totalstetig gewählt werden. Weiter sieht man, daß in Hilfsatz 1 n ebenso gut durch eine stetige Veränderliche x ersetzt werden darf. (Man betrachte $\eta_n = \operatorname{fin}_{n-1 \leqq x \leqq n} \eta_x$!)

Beweis. Wir setzen $\eta'_k = \min\limits_{n \geqq k} \eta_n$ und bestimmen eine Teilfolge $\{n_k\}$ der natürlichen Zahlen, so daß

$$(7) \quad \frac{n_k}{\eta'_k} \nearrow +\infty \quad (k \to \infty) \qquad \text{und} \qquad (8) \quad n_k \geqq \xi(k+1)$$

gilt. Definieren wir dann $\bar{\eta}(x)$ so, daß $\bar{\eta}(x)$ in jedem Intervall der Form $[n_k, n_{k+1}]$ linear ist und für $x = n_k$ $\bar{\eta}(x) = \eta'_k$ gilt, so ist $\eta(x) = \bar{\eta}(\xi(x))$ eine Funktion der verlangten Art: Nach Konstruktion streben nämlich $\bar{\eta}(n_k)$ und $\frac{n_k}{\bar{\eta}(n_k)}$ monoton gegen $+\infty$ und folglich [12]) auch $\bar{\eta}(x)$ und $\frac{x}{\bar{\eta}(x)}$; ersetzt man hierin x durch $\xi(x)$, so erhält man (4) und (5).

Weiter gilt

$$(3) \quad \eta(n) = \bar{\eta}(\xi(n)) \leqq \bar{\eta}(n_{k+1}) = \eta'_{k+1} \qquad (n_k \leqq \xi(n) \leqq n_{k+1})$$
$$\leqq \eta'_n \leqq \eta_n \qquad : (8), (6).$$

Der Zusatz bei totalstetigem $\xi(x)$ schließlich ist trivial, da ja $\bar{\eta}(x)$ stückweise linear ist.

Hiermit sind alle Teile der Behauptung bewiesen.

Hilfssatz 2: Voraussetzung. Es bezeichne $L(x)$ eine totalstetige Funktion mit den Eigenschaften

$$(9) \quad L(x) \nearrow +\infty \quad (x \to \infty) \quad \text{und} \qquad (10) \quad x \frac{L'(x)}{L(x)} \searrow \quad (x \to \infty).$$

(Funktionen dieser Art sind z. B. iterierte Logarithmen.)
Weiter seien $a(n)$ und $b(n)$ zwei positive Zahlenfolgen, für welche die Bedingungen

$$(11) \quad a(n) \nearrow \quad (n \to \infty) \qquad \text{und} \qquad (12) \quad b(n) \to \infty \quad (n \to \infty)$$

erfüllt sind.

Behauptung. Unter diesen Voraussetzungen folgt aus

$$(13) \quad 1 \leqq \frac{L(a(n))}{L(b(n))} \nearrow \qquad (n \to \infty)$$

die entsprechende Beziehung ohne L

$$(14) \quad 1 \leqq \frac{a(n)}{b(n)} \nearrow \qquad (n \to \infty).$$

Zusatz. Es genügt natürlich, statt (11) und (12)

$$(15) \quad b(n) \nearrow +\infty \qquad (n \to \infty)$$

zu verlangen, da dann (11) eine Folge von (15) und (13) ist. Weiter sieht man, daß auch in Hilfssatz 2 n durch eine stetige Veränderliche ω ersetzt werden darf.

---

[12]) Hierbei benutzen wir, daß eine lineargebrochene Funktion immer monoton ist.

Beweis. Wir erklären $a(x)$ für nicht ganzzahlige x so, daß $L(a(x))$ in jedem Intervall der Form $[n, n+1]$ linear ist; auf die gleiche Art wird $b(x)$ definiert. Auf Grund unserer Voraussetzungen ist dann $a(x)$ und $b(x)$ totalstetig[13]; ferner gilt (11) — (13) mit x statt n[12], insbesondere also

$$\left[\frac{L(a(x))}{L(b(x))}\right]' \geqq 0 \qquad : (13), \tag{16}$$

$$a(x) \geqq b(x) \qquad : (13), (9). \tag{17}$$

Durch Umformung von (16) erhält man nun nacheinander die Ungleichungen

$$\frac{L(a(x))}{L(b(x))}\left[\frac{L'(a(x))\cdot a'(x)}{L(a(x))} - \frac{L'(b(x))\cdot b'(x)}{L(b(x))}\right] \geqq 0$$

$$\frac{a'(x)}{a(x)}\cdot a(x)\,\frac{L'(a(x))}{L(a(x))} \geqq \frac{b'(x)}{b(x)}\cdot b(x)\,\frac{L'(b(x))}{L(b(x))}$$

$$\frac{a'(x)}{a(x)}\cdot b(x)\,\frac{L'(b(x))}{L(b(x))} \geqq \frac{b'(x)}{b(x)}\cdot b(x)\,\frac{L'(b(x))}{L(b(x))} \qquad : (17), (10), (11)$$

$$\frac{a'(x)}{a(x)} \geqq \frac{b'(x)}{b(x)}.$$

Die letzte Ungleichung aber sichert die Behauptung.

2. 2. Allgemeine Lösung (hinreichender Teil).

Satz 2: *Unter der Voraussetzung*

$$0 < G(s) \nearrow \qquad (s \to \infty)\,[14] \tag{h}$$

ist für die Gültigkeit von $(s, O \to K)$ *hinreichend:*

$$\int_{1_N}^{n} \frac{ds}{s\,G(s)} = O(1) \qquad (n \to \infty) \tag{z}$$

(*gleichgültig in welcher Form* (s) *und* (O) *benutzt werden*).

---

[13]) Hierbei benutzen wir, daß die Umkehrfunktion von $L(x)$ — sie werde etwa mit $E(x)$ bezeichnet — einer Lipschitz-Bedingung genügen muß. Dies erkennt man aus der Ungleichung, die entsteht, wenn man in

$$\int_{E(a)}^{E(b)} L'\,x\;dx = b - a$$

den Integranden durch eine positive untere Schranke (s. (10)) ersetzt. Man beachte, daß $L'(x)$ für große x niemals Null werden kann, da aus $L'(x_0) = 0$ wegen (10) auch $L'(x) = 0$ für alle $x \geqq x_0$ folgt und dies im Widerspruch zu (9) steht!

[14]) Statt (h) würde auch die Vorraussetzung $s\,G(s) \nearrow$, $G(s) \geqq 1$ genügen: natürlich kann man die Voraussetzungen über $G(s)$ weiter verringern, wenn man statt dessen die Bedingungen (1°)—(3°) über $A(\omega)$ einführt (wo also statt n wieder die stetige Veränderliche ω vorkommt). Alles dies führt aber zu keinerlei interessanten Verbesserungen.

Beweis. Aus (s) folgt wegen (h) jedenfalls

$$\Phi(t) = o\left(\frac{1}{G\left(\frac{1}{t}\right)}\right) \qquad (t \to +0). \tag{18}$$

Wir können daher o. B. d. A.

$$\int^{\infty} \frac{ds}{s\,G(s)} = +\infty \tag{19}$$

annehmen, denn wenn das Integral (19) konvergieren würde, so würde wegen (18) auch

$$\int_0 \frac{\Phi(t)}{t}\,dt \quad \text{und damit} \quad \int_0 \left|\frac{\varphi(t)}{t}\right| dt \quad \text{existieren,}$$

und nach einem Kriterium von Dini wäre dann die Fourier-Reihe konvergent zur Summe $s(x)$.

Wir setzen nun

$$l(\omega) = \int^{\omega} \frac{ds}{s\,G(s)} \tag{20}$$

und bezeichnen etwa mit $\bar{l}(\omega)$ die Umkehrfunktion von $l(\omega)$. Ferner sei

$$\Lambda(\omega, \varepsilon) = \bar{l}\,(l(\omega) - \varepsilon) \qquad (\varepsilon > 0). \tag{21}$$

Die Funktion $\Lambda(\omega, \varepsilon)$ erfüllt die Bedingungen (2^0) und (3^*):

$$\Lambda(\omega, \varepsilon) \nearrow +\infty \quad (\omega \to \infty) \qquad : (19), \tag{2^0}$$

$$\Lambda(\omega, \varepsilon) \text{ ist totalstetig } [15]), \tag{3^*}$$

$$\Lambda'(\omega, \varepsilon) = \frac{l'(\omega)}{l'(\Lambda(\omega, \varepsilon))} \leqq 1 = O(1) \qquad : (h)\,[16]).$$

Weiter gibt es nach (z) eine positive Konstante A, so daß

$$\left|\int_{A_n}^{n} \frac{ds}{s\,G(s)}\right| \leqq A = \int_{\Lambda(n,\,A)}^{n} \frac{ds}{s\,G(s)} \qquad (n \to \infty)$$

gilt. Hieraus folgt $A_n \geqq \Lambda(n, A) \quad (n \to \infty)$ und daher

$$a_n = O_L\left(\frac{1}{\Lambda(n,\,A)}\right) \qquad : (O). \tag{22}$$

Satz 2 wird also bewiesen sein, wenn wir zeigen können, daß mit der Funktion $\Lambda(\omega) = \Lambda(\omega, A)$ auch die Voraussetzungen 1 (6) und 1 (7)

---

[15]) $\bar{l}(\omega)$ genügt wegen (h) einer Lipschitz-Bedingung (vgl. [13])).

[16]) Man beachte, daß $\Lambda(\omega, \varepsilon) \leqq \omega$ ist.

von Satz 1 erfüllt sind. Beides folgt nun aus (18): 1 (6) ist wegen (h) trivial; 1 (7) ergibt sich durch partielle Integration, da ja

$$\int_{\frac{1}{\omega}}^{\frac{1}{\Lambda(\omega)}} \frac{dt}{t\,G\left(\frac{1}{t}\right)} = \int_{\Lambda(\omega)}^{\omega} \frac{ds}{s\,G(s)} = A = O(1)$$

ist.

Satz 3. Voraussetzung. *Es gelte*

$$(H) \qquad 0 < G(s) \nearrow +\infty \qquad (s \to \infty).$$

Weiter sei $\{\Lambda\}$ *eine solche Menge von Zahlenfolgen* Λ_n, *daß es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *eine Zahlenfolge* $\Lambda_n \in \{\Lambda\}$ *gibt, für welche die Ungleichung*

$$(Z^*) \qquad \left| \int_{\Lambda_n}^{n} \frac{ds}{s\,G(s)} \right| \leqq \varepsilon \qquad (n \to \infty)$$

besteht.

Behauptung. *Dann folgt* (K) *aus* (S) *und*

$$(O^*) \qquad \alpha_n = O\left(\frac{1}{\Lambda_n}\right) \text{ oder } = o_L\left(\frac{1}{\Lambda_n}\right) \text{ für alle } \Lambda_n \in \{\Lambda\}$$

(gleichgültig in welcher Form (S) *und* (O^*) *benutzt werden).*

Unter der Voraussetzung (H) *ist insbesondere für die Gültigkeit von* $(S, O \to K)$ *hinreichend:*

$$(Z) \qquad \int_{\Lambda_n}^{n} \frac{ds}{s\,G(s)} = o(1) \qquad (n \to \infty).$$

(Die Menge $\{\Lambda\}$ *besteht in diesem Fall nur aus* Λ_n!)

Beweis. Aus (S) folgt wegen (H) jedenfalls

$$(23) \qquad \Phi(t) = O\left(\frac{1}{G\left(\frac{1}{t}\right)}\right) \qquad (t \to +0).$$

Wir können daher wieder o. B. d. A. (19) voraussetzen und weiter

$$(24) \qquad \{\Lambda\} = \{\Lambda(n, \varepsilon)\} \qquad (\varepsilon > 0),$$

da (Z^*) die Ungleichung $\Lambda_n \geqq \Lambda(n, \varepsilon)$ $(n \to \infty)$ nach sich zieht.

Für die Funktionen $\Lambda(\omega, \varepsilon)$ gilt die Beziehung

$$(25) \qquad \Lambda(\omega, \varepsilon'') = o(1)\ \Lambda(\omega, \varepsilon') \qquad (0 < \varepsilon' < \varepsilon'').$$

Wäre nämlich noch für beliebig große ω

$$\Lambda(\omega, \varepsilon'') \,/\, \Lambda(\omega, \varepsilon') > \delta > 0\,,$$

so käme man wegen

$$\varepsilon'' - \varepsilon' = \int\limits_{\Lambda(\omega,\varepsilon')}^{\Lambda(\omega,\varepsilon'')} \frac{ds}{s\,G(s)} = O(1) \int\limits_{\delta\Lambda(\omega,\varepsilon')}^{\Lambda(\omega,\varepsilon')} \frac{ds}{s\,G(s)} = o(1) \int\limits_{\delta\Lambda}^{\Lambda} \frac{ds}{s} = o(1) \quad : (H)$$

zu einem Widerspruch.

Aus (24) und (25) schließen wir, daß

$$\alpha_n = 0_L\left(\frac{1}{\bar{I}(I(n) - \varepsilon(n))}\right) \quad : O(*) \tag{26}$$

ist, wobei $\varepsilon(n)$ eine positive Nullfolge bedeutet. Nach Hilfssatz 1 kann man dabei an die Funktion $\varepsilon(\omega) = \frac{1}{\eta(\omega)}$ o.B.d.A. folgende Forderungen [17]) stellen:

(27) $\varepsilon(\omega)$ ist totalstetig,

(28) $\varepsilon(\omega) \searrow 0$ $(\omega \to \infty)$, (29) $\varepsilon'(\omega) = o(1) \cdot I'(\omega)$.

Setzen wir jetzt

(30) $\Lambda(\omega) = \bar{I}(I(\omega) - \varepsilon(\omega))$,

so sind die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt:

(2°) $\Lambda(\omega) \nearrow +\infty$ $(\omega \to \infty)$: (19), (28);

(3*) $\Lambda(\omega)$ ist totalstetig : (27) [15]),

$$\Lambda'(\omega) = \frac{I'(\omega) - \varepsilon'(\omega)}{I'(\Lambda(\omega))} = O(1) \quad : (H), (29);$$

(1) $\alpha_n = O_L\left(\frac{1}{\Lambda(n)}\right)$ (: (26), (30)); 1(6) $\Phi(t) = o(1)$ (: (23), (H));

1(7) schließlich folgt durch partielle Integration (: (23)) wegen

$$\int\limits_{\Lambda(\omega)}^{\omega} \frac{ds}{s\,G(s)} = \varepsilon(\omega) = o(1) \quad : (28).$$

Hiermit ist Satz 3 vollständig bewiesen.

Wir möchten noch bemerken, daß den Sätzen 2 und 3 zwei analoge Sätze 2′ und 3′ bei konjugierten Reihen zur Seite stehen. (Zu der entsprechenden Bedingung (s') bzw. (S') ist natürlich noch 1 (6″) hinzuzurechnen! — Die Beweise lassen sich ganz analog führen, und der Zusammenhang (z) bzw. (Z) zwischen $G(s)$ und Λ_n bleibt derselbe.)

2.3. Anwendungen und Beispiele. Wir wollen jetzt zeigen, wie man die Bedingungen (z) bzw. (Z*) in einfacher Weise nach Λ_n auf-

[17]) Man setzte in Hilfssatz 1 $\xi = I(\omega)$! $I(\omega)$ erfüllt (6) und ist totalstetig. Aus $\varepsilon(\omega)\,I(\omega) \nearrow +\infty$ folgt $-\varepsilon'(\omega) \leqq \frac{\varepsilon(\omega)}{I(\omega)} \cdot I'(\omega)$ und damit (29).

lösen kann. Am naheliegendsten ist es natürlich, die Zahlenfolgen $\Lambda(n, \varepsilon)$ (s. (21)) zu benutzen. Doch kommt man auf einfachere[18]) Funktionen, wenn man allgemeiner

$$G(s) = \Pi(s) \cdot \gamma(s), \quad \Lambda_n = e(l(n) - \varrho\gamma(n)) \tag{31}$$

setzt, wobei $l(\omega)$ und $e(\omega)$ durch

$$l(\omega) = \int^{\omega} \frac{ds}{s\Pi(s)}, \quad e(l(\omega)) = \omega \tag{32}$$

definiert sind und wobei die Bedingungen

$$0 < \varrho < \frac{l(\omega)}{\gamma(\omega)} \quad (\omega \to \infty), \tag{33}$$

$$\frac{l(\omega)}{\gamma(\omega)} \nearrow \quad (\omega \to \infty) \tag{34}$$

erfüllt sein sollen.

Bei diesen Voraussetzungen besteht zwischen $G(s)$ und Λ_n in der Tat der Zusammenhang (z) bzw. (Z^*) (im letzten Falle besteht $\{\Lambda\}$ aus den durch (31) gegebenen Zahlenfolgen Λ_n bei beliebigem „zulässigen ϱ“[19])). Dies folgt sofort aus der Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda_n}^{n} \frac{ds}{s\,G(s)} &= \int_{\Lambda_n}^{n} \frac{l(s)}{\gamma(s)} \cdot \frac{1}{l(s)} \cdot \frac{ds}{s\Pi(s)} \\ &\leqq \frac{l(n)}{\gamma(n)} \cdot \frac{1}{l(\Lambda_n)} \cdot \Big[l(s)\Big]_{s=\Lambda_n}^{s=n} \qquad :(34) \\ &\leqq \frac{l(n)}{\gamma(n)} \cdot \frac{1}{l(n) - \varrho\gamma(n)} \cdot \varrho\gamma(n) = \varrho\left[1 - \varrho\frac{\gamma(n)}{l(n)}\right]^{-1}, \end{aligned} \tag{35}$$

denn der Ausdruck $\varrho\left[1 - \varrho\,\frac{\gamma(n)}{l(n)}\right]^{-1}$ ist wegen (33) und (34) beschränkt und kann sogar kleiner als ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ gemacht werden, wenn man nur ϱ hinreichend klein wählt.

Wir wollen das Ergebnis kurz zusammenfassen:

Satz 2. 1: *Die Bedingungen* (h), (31) — (34) *sind hinreichend für die Gültigkeit von* $(s, O \to K)$.

Satz 3. 1: *Die Bedingungen* (H), (31) — (34) *sind hinreichend für die Gültigkeit von* $(S, O^* \to K)$.

(Entsprechendes gilt bei konjugierten Reihen.)

Satz 2. 1 stellt für $\gamma(s) \equiv 1$ eine Verallgemeinerung eines Konvergenzkriteriums von Morgan [10] dar — und zwar im wesentlichen dieselbe, die kürzlich von Sunouchi [12] gegeben wurde.

Ein paar (auch an sich interessante) Beispiele sollen die vielfachen Möglichkeiten aufzeigen, zu konkreten Kriterien zu gelangen, und gleichzeitig auf die Grenzen der Methode hinweisen:

---

[18]) Dies liegt an der Willkür in der Produktzerlegung $G = \Pi.\gamma$: Man braucht nur darauf zu achten, daß $l(\omega)$ und $e(\omega)$ einfache Funktionen werden!

[19]) Ein ϱ heißt zulässig, wenn (33) erfüllt ist.

2. 3. 1. Wenn man bedenkt, daß für $G(s)$ nur solche Größenordnungen in Frage kommen, für die (19) gilt, so wird von besonderem Interesse [20])

$$\prod(s) = \prod_{\varkappa=1}^{k} \log_\varkappa s \qquad (k = 0, 1, \ldots) \tag{36}$$

sein. In diesem Falle ist

$$l(\omega) = \log_{k+1}\omega, \quad e(\omega) = \exp_{k+1}\omega \tag{37}$$

und

$$\Lambda_n = \exp_k (\log_k n \,/\, g^\varrho(n)), \tag{38}$$

wobei wir

$$G(s) = \prod_{\varkappa=1}^{k} \log_\varkappa s \cdot \log g(s), \text{ d. h. } \gamma(s) = \log g(s) \tag{39}$$

gesetzt haben; die Voraussetzungen lauten (abgesehen von (h) bzw. (H)):

$$0 < \varrho < \frac{\log_{k+1}\omega}{\log g(\omega)} \ (\omega \to \infty), \qquad \frac{\log_{k+1}\omega}{\log g(\omega)} \nearrow \ (\omega \to \infty).$$

Der obige Ansatz für $G(s)$ liefert infolge der Freiheit von $\log g(s)$ eine nahezu lückenlose Skala von Größenordnungen. Besonders einfache Verhältnisse herrschen im Falle $k = 0$:

$$G(s) = \log g(s), \quad \Lambda_n = n / g^\varrho(n).$$

Alle Voraussetzungen sind erfüllt, wenn man hier z. B.

$$g(s) = \log_k s \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

setzt; für $k = 0$ erhält man so die bekannten Konvergenzkriterien von HARDY-LITTLEWOOD

$$G(s) = \log s, \quad \Lambda_n = n^{1-\varrho} \qquad (0 < \varrho < 1).$$

2. 3. 2. Die Größenordnungen von $G(s)$, die durch (36) gegeben werden, liegen zwischen Produkten aus iterierten Logarithmen. Die dazugehörigen Zahlenfolgen Λ_n in (38) wachsen dann stärker als jede Potenz von $\log n$ [21]). Man wird vermuten, daß sich bei gewissen stärker wachsenden Funktionen $G(s)$ für Λ_n Potenzen von Logarithmen und ähnliches ergeben werden. Um dies zu erreichen, setzen wir

$$\prod(s) = \prod_{\varkappa=1}^{k-1} \log_k s \quad \text{für} \quad e_k \leqq s \leqq e_{k+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{40}$$
$$[e_k = \exp_k(0)]$$

[20]) Es sei $\log_0 x = x$, $\log_1 x = \log x, \ldots, \log_k x = \log\log_{k-1} x$ und $\exp_k x$ die Umkehrfunktion von $\log_k x$ $(k = 0, 1, \ldots)$.

[21]) Um dies zu sehen, wende man den Hilfssatz 2 mit $L(x) = \log_{k+1} x$ an (: (34)!).

$\prod(s)$ ist dann stetig und wächst monoton, weiter ist

$$(41)\qquad \begin{cases} l(\omega) = \log_k \omega + k \\ e(\omega) = \exp_k(\omega - k) \end{cases} \text{ für } \begin{matrix} e_k \leqq \omega \leqq e_{k+1} \\ k \leqq \omega \leqq k+1 \end{matrix} \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Wir führen nun einige naheliegende Bezeichnungen ein:

$$(42)\qquad \prod(s) = \overset{\infty}{\prod}(s),\ l(\omega) = \log_\infty \omega,\ e(\omega) = \exp_\infty \omega.$$

Damit wird — in (31) ist $\gamma(s) \equiv 1$ gesetzt; alle positiven ϱ sind dann zulässig —

$$(43)\qquad \Lambda_n = \exp_\infty(\log_\infty n - \varrho).$$

Für ganzzahlige ϱ ist speziell

$$\exp_\infty(\log_\infty \omega - \varrho) = \exp_\infty(\log_k \omega + k - \varrho) = \exp_{k-\varrho} \log_k \omega = \log_\varrho \omega. \qquad (e_k \leqq \omega \leqq e_{k+1},\ k \geqq \varrho)$$

Diese Bemerkung erlaubt uns für jede reelle Zahl $\varrho \geqq 0$ die Definition

$$(44)\qquad \log_\varrho \omega = \exp_\infty(\log_\infty \omega - \varrho) \text{ für } \omega \geqq \exp_\infty \varrho.$$

Wir erhalten so

$$G(s) = \overset{\infty}{\prod}(s),\ \Lambda_n = \log_\varrho n \qquad (\varrho > 0).$$

2. 3. 3. Bei allen Konvergenzkriterien, die wir bisher bewiesen haben, tritt die Voraussetzung $\Phi(t) = o(1)$ bzw. $\Psi(t) = o(1)$ auf (vgl. Satz 1 bzw. 1'). Solange nun $\Lambda_n = o(n)$ ist, erscheint dies, wie wir in § 3 sehen werden, den Verhältnissen durchaus angepaßt. Ist aber $\Lambda_n = n$, so ist diese Voraussetzung zu grob; es gelten dann zwei abschließende Sätze A und A', die von Hardy-Littlewood [5] herrühren:

Satz A: *Unter Voraussetzung von*

$$(45)\qquad \alpha_n = O_L\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n \to \infty)$$

ist

$$1\,(6^*)\qquad \overset{\backsim}{\varphi}_1(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau = o(1) \qquad (t \to 0)$$

notwendig und hinreichend für (K).

Satz A': *Unter Voraussetzung von*

$$(45')\qquad \beta_n = O_L\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n \to \infty)$$

ist

$$1\,(6'')\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \psi(t)\ \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,dt = \bar{s}(x)$$

notwendig und hinreichend für (K').

§ 3.

Gegenbeispiele.

In diesem Paragraphen zeigen wir durch Gegenbeispiele, daß die Bedingungen (z) bzw. (Z) nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig für die Gültigkeit unserer Konvergenzkriterien sind. Hieraus folgt dann, daß die speziellen Kriterien von § 2.3 „beste Sätze ihrer Art" sind, wie dies im Falle $G(s) = \log s$ bereits von HARDY-LITTLEWOOD [6], [7] bewiesen wurde und in allgemeineren Fällen von MORGAN [10] erwähnt wird [22]).

3.1. Der Grenzfall $\Lambda_n = n$. In § 2.3.3 erkannten wir, daß unsere Methode für $\Lambda_n = n$ Konvergenzbedingungen liefert $\left[\varphi(t) = o(1), \alpha_n = O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$, die nicht mehr ganz das Wesen der Sache treffen. Dies liegt im Grunde daran, daß wir für die Funktion nur Bedingungen der Form (s) bzw. (S) zugelassen haben: Dann hört nämlich die Folge der Konvergenzkriterien bei $\Lambda_n = n$ auf [23]) — wie Satz 1 zeigen wird —, und es ist nicht weiter erstaunlich, daß sich in diesem Grenzfall mehr beweisen läßt. Doch durch schwächere Bedingungen vom gleichen Typ lassen sich $\varphi(t) = o(1)$, $\alpha_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ nicht ersetzen (s. Satz 1 und 2)!

Satz 1: *Zu jeder positiven Zahlenfolge* $\{\Lambda_n\}$,

$$(1) \qquad \Lambda_n \nearrow +\infty, \qquad (2) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\Lambda_\nu} = +\infty,$$

gibt es eine Funktion $f(x)$, *deren* FOURIER-*Reihe an der Stelle* $x = 0$ *divergiert, für die aber trotzdem die Bedingungen*

$$(3) \qquad \varphi(t) = O(1), \qquad (4) \qquad \alpha_n = o\left(\frac{1}{\Lambda_n}\right)$$

erfüllt sind.

Beweis: Man darf o. B. d. A.

$$(5) \qquad \frac{1}{\Lambda_n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

annehmen, da unter unseren Voraussetzungen auch

$$\sum_{\Lambda_n > n} \frac{1}{\Lambda_n} + \sum_{\Lambda_n \leqq n} \frac{1}{n} = +\infty$$

ist [24]).

---

[22]) vgl. auch MORGAN [11], wo der Verfasser zwei negative Theoreme bezüglich gleichmäßiger Konvergenz aufstellt, die in engem Zusammenhang mit dem von ihm bewiesenen Konvergenzkriterium (s. Satz 2, 2.1) stehen.

[23]) vgl. in diesem Zusammenhang 1 (3**) bzw. 2 (3**)!

[24]) Dies folgt aus der Ungleichung

$$(*) \qquad \sum_{\Lambda_n > n} \frac{1}{\Lambda_n} \geqq \sum_{k=0}^{\infty} (n_{k+1} - n_k - 1) \frac{1}{n_{k+1}},$$

Wir betrachten nun die Reihe

$$(6)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu e^{i\nu x} \qquad \left(c_n = \frac{1}{\Lambda_n}\,\lambda_n^{i-1},\ \lambda_n = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\Lambda_\nu}\right).$$

Auf Grund unserer Annahmen gilt

$$(7)\qquad c_{n+1} - c_n = \left(\frac{1}{\Lambda_{n+1}} - \frac{1}{\Lambda_n}\right)\lambda_{n+1}^{i-1} + \frac{1}{\Lambda_n}\,(\lambda_{n+1}^{i-1} - \lambda_n^{i-1}) \qquad :(6)$$

$$= O\left(\frac{1}{\Lambda_n} - \frac{1}{\Lambda_{n+1}}\right) + O\left(\frac{1}{\Lambda_n}\cdot\frac{1}{\Lambda_{n+1}}\right) \qquad :(6)$$

$$= O\left(\frac{1}{\Lambda_n} - \frac{1}{\Lambda_{n+1}}\right) + O\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \qquad :(5)$$

und

$$(8)\qquad c_n - \frac{1}{i}\,(\lambda_n^i - \lambda_{n-1}^i) = \int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} (\lambda_n^{i-1} - t^{i-1})\,dt$$

$$= O\left(\frac{1}{\Lambda_n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad :(6),(5).$$

Hieraus folgt leicht alles Weitere:

1^0. Die Reihe (6) konvergiert für $0 < |x| \leqq \pi$.

Dies ist eine Folgerung aus dem Abel'schen Konvergenzkriterium, da $\sum |c_{n+1} - c_n|$ konvergiert und $c_n = o(1)$ ist (:(7), (1), (6)).

2^0. Für $x = 0$ divergiert sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil der Reihe (6).

Infolge (8) hat nämlich die Reihe $\sum c_\nu$ dasselbe Konvergenzverhalten wie $\sum \frac{1}{i}\,(\lambda_n^i - \lambda_{n-1}^i)$, also wie die Folge λ_n^i (:(2)).

3^0. Die Teilsummen der Reihe (6) sind für alle x gleichmäßig beschränkt.

Dies ergibt sich durch Abel'sche partielle Summation:

Ist nämlich $m = \left[\frac{1}{|1 - e^{ix}|}\right]$, $0 < |x| \leqq \pi$,

so findet man für $n \leqq m$

$$(9)\qquad \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu e^{i\nu x} = O(1) + \frac{1}{i}\sum_{\nu=1}^{n} (\lambda_\nu^i - \lambda_{\nu-1}^i)\, e^{i\nu x} \qquad :(8)$$

$$= O(1) + \frac{1}{i}\,\lambda_\nu^i\, e^{i(\nu+1)x}\Big|_{\nu=0}^{\nu=n} - \frac{1}{i}\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu^i\,(e^{i(\nu+1)x} - e^{i\nu x})$$

$$= O(1) + O(1) + |e^{ix} - 1| \cdot O(m) = O(1),$$

---

in der n_k die ganzen Zahlen mit $\Lambda_n \leqq n$ in ihrer natürlichen Reihenfolge bedeuten: Ist nämlich $\sum \frac{1}{n_k} < +\infty$ – und es genügt, diesen Fall zu betrachten —, so ist entweder $\sum\left(1 - \frac{n_k}{n_{k+1}}\right) = +\infty$ und folglich wegen (*) auch $\sum_{\Lambda_n \geqq n} \frac{1}{\Lambda_n} = +\infty$, oder es sind überhaupt nur endlich viele n_k vorhanden; anderenfalls könnte man aus $\sum\left(1 - \frac{n_k}{n_{k+1}}\right) = \sum a_k < +\infty$ den Widerspruch $\log n_{k+1} = \log n_0 + \log\left[\prod_{\varkappa=0}^{k}(1 - a_\varkappa)\right]^{-1} = O(1)$ herleiten!

für $n \geqq m$

$$(10)\quad \sum_{\nu=m+1}^{n} c_\nu e^{i\nu x} = c_{\nu+1}\frac{1-e^{i(\nu+1)x}}{1-e^{ix}}\Bigg|_{\nu=m}^{\nu=n} - \sum_{\nu=m+1}^{n}(c_{\nu+1}-c_\nu)\frac{1-e^{i(\nu+1)x}}{1-e^{ix}}$$

$$= O\left(\frac{n+1}{\Lambda_{n+1}}\right) + O\left(\frac{m+1}{\Lambda_{m+1}}\right) + \frac{1}{|1-e^{ix}|}O\left(\frac{1}{\Lambda_{m+1}}\right) + \frac{1}{|1-e^{ix}|}O\left(\frac{1}{m+1}\right)$$

$$= O(1) \qquad : (7), (1); (5),$$

beides gleichmäßig für $0 < |x| \leqq \pi$; die beiden Abschätzungen (9) und (10) haben aber 3^0 zur Folge!

Aus 1^0, 2^0, 3^0 gewinnt man ohne Schwierigkeit die Behauptung: Nach 1^0 stellt die Reihe (6) eine komplexe Funktion dar; wegen 3^0 ist diese Funktion beschränkt und weiter (6) ihre Fourier-Reihe, da man nach einem Satz von Lebesgue gliedweise integrieren darf. In Verbindung mit 2^0 sieht man, daß z. B. der Realteil dieser Funktion — etwa $f(x)$ genannt — alle im Satz behaupteten Eigenschaften besitzt.

Dem gleichen Beweis entnimmt man für konjugierte Reihen

Satz 1′: *Unter Voraussetzung von* (1) *und* (2) *sind*

$$(3')\qquad \psi(t) = O(1) \quad \textit{und} \quad (4')\quad \beta_n = o\left(\frac{1}{\Lambda_n}\right)$$

keine Konvergenzbedingungen für KR (f).

Hier ist die übliche Analogie, nach der man zu (3′) noch 1 (6″) hinzuzurechnen hätte, verloren gegangen, und Satz A′ zeigt, daß eine derartige Behauptung tatsächlich falsch wäre.

Übrigens läßt sich den Sätzen 1 und 1′ mit Hilfe von Satz A und A′ noch eine neue Form geben, auf die hier nur hingewiesen sei [25].

3. 2. Allgemeine Lösung (notwendiger Teil). Wir machen folgende Voraussetzungen (N) bzw. (N^*):

$$(11)\qquad 0 < G(s) \nearrow, \qquad (12)\quad \Lambda_n \nearrow +\infty$$

$$(13)\qquad \frac{n}{\Lambda_n} \nearrow \qquad \text{bzw.} \quad (13^*)\quad \frac{n}{\Lambda_n} \nearrow +\infty.$$

Satz 2: *Unter Voraussetzung von* (N) *ist* (z) *notwendig für die Gültigkeit von* $(s, O \to K)$ *(gleichgültig in welcher Form* (s) *und* (O) *benutzt werden).*

Beweis. Wir zeigen sogar: Gilt

$$(14)\qquad \int_{\Lambda_n}^{n} \frac{ds}{sG(s)} \neq O(1) \quad (n \to \infty),$$

so gibt es eine gerade, mit 2π periodische Funktion $\varphi(t)$, deren Fourier-Reihe an der Stelle $t = 0$ divergiert, für die aber trotzdem

[25] Für die im Beweis konstruierte Funktion $f(x)$ gilt $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$!

die Bedingungen

$$(15)\qquad \varphi(t) = o\left(\frac{1}{G\left(\frac{1}{t}\right)}\right), \qquad (16)\quad \alpha_n = o\left(\frac{1}{\Lambda_n}\right)$$

erfüllt sind.

Zunächst bemerkt man, daß aus (14) sogar (13*) folgt (:(11), (13)) und weiter

$$(17)\qquad c_n = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{\Lambda_n}} \frac{|\sin nt|}{t\,G\left(\frac{1}{t}\right)} \geqq \int \frac{\sin^2 nt}{t\,G\left(\frac{1}{t}\right)}$$

$$\geqq \int \frac{1}{2}\,(1-\cos 2nt)\frac{dt}{t\,G\left(\frac{1}{t}\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t\,G\left(\frac{1}{t}\right)} + O(1) \neq O(1)\ ^{26}).$$

Wir konstruieren nun induktiv eine Teilfolge $\{n_k\}$ der natürlichen Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

$$(18)\qquad \frac{1}{c_{n_k}} = o(1)\quad (k \to \infty), \qquad (19)\quad \frac{1}{n_k} < \frac{1}{\Lambda_{n_k}} < \frac{1}{n_{k-1}},$$

$$(20)\qquad \left| \sum_{\varkappa=0}^{k-1} \int_0^{\pi} \frac{v_\varkappa(t)}{c_{n_\varkappa}} \cdot \frac{1}{t\,G\left(\frac{1}{t}\right)} \sin n_k t\,dt \right| \leqq \frac{1}{2},$$

$$(21)\qquad \left| \sum_{k=0}^{k-1} \int_0^{\pi} \frac{v_\varkappa(t)}{c_{n_\varkappa}} \cdot \frac{1}{G\left(\frac{1}{t}\right)} \cos nt\ dt \right| \leqq \sqrt{\frac{\Lambda_n}{n}} \cdot \frac{1}{\Lambda_n} \text{ für } n \geqq n_k;$$

hierbei sei

$$(22)\qquad v_k(t) = \begin{cases} \operatorname{sign}\,[\sin n_k t] & \text{für } \frac{1}{n_k} \leqq t \leqq \frac{1}{\Lambda_{n_k}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gesetzt.

Die Forderungen (18)-(21) lassen sich in der Tat erfüllen: Bei (20) z. B. berücksichtige man, daß die linke Seite nach dem Riemann'schen Lemma gegen Null strebt für $n_k \to \infty$ [27]), bei (21) dagegen, daß die linke Seite gleich $O\left(\frac{1}{n}\right) = o(1)\sqrt{\frac{\Lambda_n}{n}} \cdot \frac{1}{\Lambda_n}$ (:(13*)) ist, weil die Faktoren von $\cos nt$ von beschränkter Schwankung sind.

---

[26]) Nach dem zweiten Mittelwertsatz ist

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{\Lambda_n}} \frac{\cos 2nt}{t\,G\left(\frac{1}{t}\right)} = \frac{1}{G(\Lambda_n)} \cdot n \cdot \int \cos 2nt\,d = O(1) \qquad :(11).$$

[27]) k ist dabei als fest zu betrachten!

Setzen wir jetzt

$$v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_k(t)}{c_{n_k}} \tag{23}$$

und definieren dann $\varphi(t)$ als gerade und mit 2π periodische Funktion durch

$$\varphi(t) = \frac{v(t)}{G\left(\frac{1}{t}\right)} \quad \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq \pi, \tag{24}$$

so hat $\varphi(t)$ alle behaupteten Eigenschaften:

1^0. Es gilt (15):

$$v(t) = o(1) \quad (t \to 0) \qquad : (23), (22), (19), (18); \tag{25}$$

insbesondere ist $\varphi(t) = o(1)$.

2^0. Die FOURIER-Reihe von $\varphi(t)$ divergiert an der Stelle $t = 0$:

Es ist nämlich

$$\left| \int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{t} \sin n_k t \, dt \right| \geqq \left| \int_{\frac{1}{n_k}}^{\frac{1}{\Lambda_{n_k}}} \right| - \left| \int_{\frac{1}{\Lambda_{n_k}}}^{\pi} \right| - \left| \int_0^{\frac{1}{n_k}} \right|$$

$$\geqq 1 - \frac{1}{2} + o(1) \qquad : (24), (23), (22), (19), (17); (20); 1^0$$

und folglich $\int_0^{\pi} \varphi(t) \frac{\sin nt}{t} \, dt \neq o(1)$, was mit der Konvergenz der FOURIER-Reihe in Widerspruch [28]) stehen würde, da nach 1^0 nur $s(0) = 0$ in Frage kommt.

3^0. Es besteht die Beziehung (16):

Wir schreiben

$$\int_0^{\pi} \varphi(t) \cos nt \, dt = \int_0^{\frac{1}{\Lambda_n}} + \int_{\frac{1}{\Lambda_n}}^{\frac{1}{\Lambda_{n_k}}} + \int_{\frac{1}{\Lambda_{n_k}}}^{\pi} = \int_1 + \int_2 + \int_3 \quad (n_k \leqq n \leqq n_{k+1}). \tag{26}$$

[28]) Nach Satz 1,3 hätte es genügt, die Beziehung

$$\int_{\frac{1}{\omega}}^{\frac{1}{\Lambda(\omega)}} \varphi(t) \frac{\sin \omega t}{t} \, dt \neq o(1)$$

nachzuweisen, was sofort aus $\int_{\frac{1}{n_k}}^{\frac{1}{\Lambda_{n_k}}} \varphi(t) \frac{\sin n_k t}{t} \, dt = 1$ folgt. Man würde dabei (20) gar nicht benötigen.

Hierbei ist

$$\int_1 = o\left(\frac{1}{\Lambda_n}\right) \qquad : 1^0 \tag{27}$$

und

$$\left|\int_3\right| \leqq \sqrt{\frac{\Lambda_n}{n}} \cdot \frac{1}{\Lambda_n} = o\left(\frac{1}{\Lambda_n}\right) \qquad : (21), (13). \tag{28}$$

Weiter findet man nach dem zweiten Mittelwertsatz

$$\int_2 = \int_{\frac{1}{\Lambda_n}}^{\frac{1}{\Lambda_{n_k}}} \frac{v_k(t)}{c_{n_k}} \cdot \frac{1}{G\left(\frac{1}{t}\right)} \cos nt\,dt = \frac{1}{G(\Lambda_{n_k})} \cdot \frac{1}{c_{n_k}} \int v_k(t) \cos nt\,dt \quad : (11) \tag{29}$$

$$= o(1) \int v_k(t) \cos nt\,dt \qquad : (18),$$

wobei das Integral $\int v_k(t) \cos nt\,dt$ in eine Summe von Integralen zerfällt, die den einzelnen Treppenstufen der Funktion $v_k(t)$ entsprechen:

$$\int v_k(t) \cos nt\,dt = \sum \pm \int \cos nt\,dt. \tag{30}$$

Die Anzahl dieser Treppenstufen und damit der Summanden in (30) ist nun höchstens

$$\frac{n_k}{\pi} \cdot \frac{1}{\Lambda_{n_k}} + 2 \leqq \frac{1}{\pi} \frac{n}{\Lambda_n} + 2 = O\left(\frac{n}{\Lambda_n}\right) \qquad : (13), \tag{31}$$

jeder Summand ist aber gleich $O\left(\frac{1}{n}\right)$ und folglich ist

$$\int_2 = o(1)\, O\left(\frac{n}{\Lambda_n}\right) O\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{\Lambda_n}\right). \tag{32}$$

Aus (26), (27), (28) und (32) folgt schließlich

$$\int_0^{\pi} \varphi(t) \cos nt\,dt = o\left(\frac{1}{\Lambda_n}\right), \tag{33}$$

womit (16) nachgewiesen ist.

Eine Variante zu Satz 2 ist

Satz 3: *Unter Voraussetzung von* (*N*) *ist* (Z) *notwendig für die Gültigkeit von* (*S*, $O \to K$) (*gleichgültig in welcher Form* (*S*) *und* (*O*) *benutzt werden*).

Beweis. Wir zeigen sogar: Gilt

$$\int_{\Lambda_n}^{n} \frac{ds}{s\,G(s)} \neq o(1) \quad (n \to \infty), \tag{34}$$

so gibt es eine gerade, mit 2π periodische Funktion $\varphi(t)$, deren

Fourier-Reihe an der Stelle $t = 0$ divergiert, für die aber trotzdem die Bedingungen

$$(35) \qquad \varphi(t) = O\left(\frac{1}{G\left(\frac{1}{t}\right)}\right), \qquad (36) \quad a_n = o\left(\frac{1}{A_n}\right)$$

erfüllt sind.

Zunächst kann man o. B. d. A. (13*) annehmen. Ist nämlich $\frac{n}{A_n}$ beschränkt, so muß wegen (34) auch $G(s)$ beschränkt bleiben, so daß die Bedingungen (35) und (36) in (3) und (4) mit $A_n = n$ übergehen; nach Satz 1 ist dann die Behauptung gesichert.

Weiter darf man o. B. d. A.

$$(37) \qquad G(s) \nearrow +\infty \quad (s \to \infty)$$

annehmen, denn wäre $G(s)$ beschränkt, so würde wegen (13*) sogar (14) erfüllt sein (dann siehe Bew. zu Satz 2!).

Der weitere Beweis kann nun völlig parallel zu dem Beweis von Satz 2 geführt werden: Statt (17) hat man im jetzigen Falle

$$(38) \qquad c_n \neq o(1),$$

so daß man statt (18) nur

$$(39) \qquad \frac{1}{c_{n_k}} = O(1)$$

verlangen kann. Die übrigen Forderungen und die Definition von $\varphi(t)$ bleibt die gleiche. Wegen (39) hat man jetzt

$$(40) \qquad v(t) = O(1) \quad (t \to 0),$$

woraus sich (35) ergibt. Der Rest des Beweises kann fast wörtlich übernommen werden.

3. 2. 1. Den Sätzen 2 und 3 entsprechen zwei analoge Sätze 2′ und 3′ bei konjugierten Reihen, (wobei zu den entsprechenden Bedingungen (s') bzw. (S') natürlich noch 1 (6″) hinzuzurechnen ist).

Satz 2′: *Unter Voraussetzung von* (N) *ist* (z) *notwendig für die Gültigkeit von* ($s', O' \to K'$).

Satz 3′: *Unter Voraussetzung von* (N^*) *ist* (Z) *notwendig für die Gültigkeit von* ($S', O' \to K'$).

Die Voraussetzung (N^*) kann hierbei nicht durch (N) ersetzt werden, wie das Beispiel $G(s) \equiv 1$, $A_n = \frac{n}{2}$ zeigt (vgl. hierzu die Bemerkungen zu Satz 1′).

Die Beweise dieser beiden Sätze entsprechen weitgehend den Beweisen von Satz 2 und 3; man hat im wesentlichen nur sin durch cos zu ersetzen, was wir etwa für den Beweis von Satz 2′ andeuten: Hier soll aus (14) die Existenz einer (ungeraden, mit 2π periodischen)

Funktion $\psi(t)$ gefolgert werden, für die $KR(\psi)$ bei $t = 0$ divergiert, obwohl die drei Bedingungen

$$\int_0 \frac{\psi(t)}{t}\, dt \text{ existiert}^{29}), \tag{41}$$

$$\psi(t) = o\left(\frac{1}{G\left(\frac{1}{t}\right)}\right), \tag{15'}$$

$$\beta_n = o\left(\frac{1}{\Lambda_n}\right) \tag{16'}$$

erfüllt sind.

Bei unserer Ersetzung von sin durch cos geht

$$c_n,\ v_k(t),\ v(t),\ \varphi(t),\ \alpha_n \quad \text{über in} \quad \bar{c}_n,\ \bar{v}_k(t),\ v(t),\ \psi(t),\ \beta_n;$$

ferner die Formeln (17) — (33) in entsprechende (17') — (33'). Es kommt also letztlich darauf an, ob man durch geeignete Wahl der Teilfolge $\{n_k\}$ auch die Forderung (41) erfüllen kann (dies wird auch bei 2^0 gebraucht!): Um dies zu erreichen, verlangen wir zusätzlich

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{c_{n_k}} \cdot \frac{1}{G(\Lambda_{n_k})} < +\infty. \tag{42}$$

Dann gilt nämlich

$$\int_{\varepsilon'}^{\varepsilon''} \frac{\psi(t)}{t}\, dt = \sum \int \frac{\bar{v}_k(t)}{\bar{c}_{n_k}} \cdot \frac{dt}{t\, G\left(\frac{1}{t}\right)} \qquad (0 < \varepsilon' < \varepsilon''),$$

wobei man die Summe nur über die k zu erstrecken braucht, für die

$$\varepsilon' < \frac{1}{\Lambda_{n_k}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{n_k} < \varepsilon''$$

ist. Bei den Integralen, die nicht Null sind, darf man hierbei als untere Grenze $\max\left(\varepsilon', \frac{1}{n_k}\right)$ und als obere $\min(\varepsilon'', 1/\Lambda_{n_k})$ schreiben. Da nun nach dem zweiten Mittelwertsatz

$$\int \frac{\bar{v}_k(t)}{c_{n_k}} \cdot \frac{dt}{t\, G\left(\frac{1}{t}\right)} = \frac{1}{c_{n_k}} \cdot \frac{n_k}{G(\Lambda_{n_k})} \int v_k(t)\, dt \qquad :(11)$$

ist und ferner

$$\left| \int \bar{v}_k(t)\, dt \right| \leqq 3\, \frac{\pi}{n_k},$$

so folgt schließlich

$$\int_{\varepsilon'}^{\varepsilon''} \frac{\psi(t)}{t}\, dt = O(1) \sum_{\frac{1}{n_k} < \varepsilon''} \frac{1}{c_{n_k}} \cdot \frac{1}{G(\Lambda_{n_k})} = o(1) \qquad (\varepsilon', \varepsilon'' \to 0). \qquad :(42)$$

Hiermit ist (41) und damit der letzte Teil der Behauptung bewiesen

[29]) (41) vertritt 1 (6'')!

3.3. Anwendungen. — Als Anwendung der Sätze 2 und 3 wollen wir jetzt zeigen, daß man bei den speziellen Konvergenzkriterien $(s, O \to K)$ und $(S, O^* \to K)$ von § 2.3 keine der Voraussetzungen abschwächen kann, ohne daß die Behauptung falsch wird.

Es gelte:

$$G(s) = \Pi(s) \cdot \gamma(s), \quad \Lambda_n = e(l(n) - \varrho\,\gamma(n)); \tag{43}$$

$$0 < \Pi(s) \nearrow, \quad 0 < \gamma(s) \nearrow; \tag{44}$$

$$\frac{l(\omega)}{\gamma(\omega)} \nearrow, \quad 0 < \varrho < \bar{\varrho} = \lim_{\omega \to \infty} \frac{l(\omega)}{\gamma(\omega)}; \tag{45}$$

$$\int^{\infty} \frac{ds}{s\,G(s)} = +\infty. \tag{46}$$

(Die Voraussetzung (46) ist wesentlich, vgl. hierzu 2 (19)!)

Wir zeigen zunächst, daß sich die Koeffizientenbedingung (O) nicht abschwächen läßt:

Satz 2.1: *Gilt* (43)—(46) *und genügt weiter* $\bar{\Lambda}_n$ *der Bedingung*

$$\bar{\Lambda}_n = o(\Lambda_n) \quad \textit{für alle zulässigen } \varrho, \tag{47}$$

so gibt es eine gerade, mit 2π *periodische Funktion* $\varphi(t)$, *deren* Fourier*-Reihe an der Stelle* $t = 0$ *divergiert, für die aber trotzdem die Bedingungen*

$$\varphi(t) = o\left(\frac{1}{G\left(\frac{1}{t}\right)}\right) \quad \textit{und} \quad (16) \quad \alpha_n = o\left(\frac{1}{\bar{\Lambda}_n}\right)$$

erfüllt sind.

Beweis. Wegen (47) hat $\bar{\Lambda}_n$ die Form

$$\bar{\Lambda}_n = e(l(n) - \varrho_n \gamma(n)), \quad \varliminf_{n \to \infty} \varrho_n \geqq \bar{\varrho}.$$

Wir müssen nun die Fälle $\bar{\varrho} < +\infty$ und $\bar{\varrho} = +\infty$ unterscheiden:

Im ersten Falle dürfen wir o.B.d.A. $\varrho_n = \varrho(n)$ annehmen, wobei

$$\varrho(\omega) = \frac{l(\omega)}{\gamma(\omega)} - \frac{1}{\eta(\omega)} \tag{48}$$

gesetzt ist und $\eta(\omega)$ den Bedingungen

$$\eta(\omega) \nearrow +\infty \quad \text{und} \quad (50) \quad \frac{\gamma(\omega)}{\eta(\omega)} \nearrow +\infty \tag{49}$$

genügt. Diese Annahme rechtfertigt unser Hilfssatz 1:
Man bringe ϱ_n durch Verkleinern auf die Form

$$\frac{l(n)}{\gamma(n)} - \frac{1}{\eta_n} \qquad (\eta_n \to \infty),$$

so daß jetzt $\varrho_n \to \bar{\varrho}$ strebt (hierdurch ist die Bedingung (16) nicht

schwächer geworden!) und beachte bei der Anwendung des Hilfssatzes, daß aus $\bar{\varrho} < +\infty$

$$l(\omega) \nearrow +\infty,\ \gamma(\omega) \nearrow +\infty \qquad : (45), (46)$$

folgt!

Im zweiten Falle können wir aus dem gleichen Grunde o. B. d. A. $\varrho_n = \varrho(n)$ annehmen, wobei jetzt

$$(49^*) \qquad \varrho(\omega) \nearrow +\infty \quad \text{und} \quad (50^*) \quad \frac{l(\omega)}{\gamma(\omega)} : \varrho(\omega) \nearrow +\infty$$

gelten soll.

Die Zahlenfolge

$$(51) \qquad \bar{\Lambda}_n = e(l(n) - \varrho(n)\gamma(n))$$

erfüllt nun in beiden Fällen die Bedingungen

$$(52) \qquad \bar{\Lambda}_n \nearrow +\infty \quad \text{und} \quad (53) \quad \frac{n}{\bar{\Lambda}_n} \nearrow.$$

(52) folgt sofort aus

$$l(n) - \varrho(n)\gamma(n) = \frac{\gamma(n)}{\eta(n)} \nearrow +\infty \qquad : (48), (50)$$

$$\text{bzw.} \quad = l(n)\left(1 - \frac{\varrho(n)\gamma(n)}{l(n)}\right) \nearrow +\infty \qquad : (50^*),$$

während man bei (53) nur Hilfssatz 2 mit $L(x) = \exp l(x)$ anzuwenden braucht:

$$\exp\{l(n) - (l(n) - \varrho(n)\ \gamma(n))\} \nearrow \qquad : (44); (45), (49) \text{ bzw. } (49^*).$$

Weiter gelten folgende Abschätzungen für $n \to \infty$:
Im ersten Falle

$$(54) \qquad \int_{\bar{\Lambda}_n}^{n} \frac{ds}{s\,\Pi(s)\,\gamma(s)} \geqq \varrho \int \frac{ds}{s\,\Pi(s)\,l(s)} = \varrho \log \frac{l(n)}{l(\bar{\Lambda}_n)} \qquad : (45)$$

$$\geqq \varrho \log\left(\frac{l(n)}{\gamma(n)} \cdot \eta(n)\right) \to \infty \qquad : (48), (45), (49);$$

im zweiten Falle

$$(54^*) \qquad \int_{\bar{\Lambda}_n}^{n} \frac{ds}{s\,\Pi(s)\,\gamma(s)} \geqq \frac{1}{\gamma(n)}\{l(n) - l(\bar{\Lambda}_n)\} = \varrho(n) \to \infty \qquad : (44), (49^*).$$

Die vorstehenden Überlegungen zeigen, daß wir Satz 2 anwenden dürfen; wir erhalten dabei die Behauptung.

Der nächste Satz zeigt, daß man weder die Bedingung (s) noch (0^*) abschwächen kann:

Satz 3.1: *Gilt* (43)—(46) *und ist* ϱ *beliebig (zulässig) gewählt, so gibt es immer eine gerade und mit* 2π *periodische Funktion* $\varphi(t)$,

deren Fourier*-Reihe an der Stelle* $t = 0$ *divergiert, für die aber trotzdem die Bedingungen*

$$\varphi(t) = O\left(\frac{1}{G\left(\frac{1}{t}\right)}\right) \qquad (t \to +0) \tag{35}$$

und

$$\alpha_n = o\left(\frac{1}{\Lambda_n}\right) \quad \textit{für das eine gewählte } \varrho \tag{36}$$

erfüllt sind.

Beweis. Die Zahlenfolge Λ_n (s. (43)) erfüllt die beiden Bedingungen

$$\Lambda_n \nearrow +\infty \quad \text{und} \quad (56)\ \frac{n}{\Lambda_n} \nearrow ; \tag{55}$$

um (56) zu beweisen, verwende man wieder Hilfssatz 2 mit $L(x) = \exp l(x)$!

Weiter ist

$$\int_{\Lambda_n}^{n} \frac{ds}{s\,\Pi(s)\,\gamma(s)} \geqq \frac{1}{\gamma(n)}\,[l(n) - l(\Lambda_n)] = \varrho + o(1) \qquad :(44). \tag{57}$$

Hiermit ist gezeigt, daß wir Satz 3 anwenden dürfen; wir erhalten dabei die Behauptung.

Zum Schluß stellen wir fest, daß sich auch die Bedingung (S) nicht abschwächen läßt:

Satz 3.2: *Gilt* (43)—(46) *und genügt* $\eta(s)$ *der Bedingung*

$$\eta(s) \to +\infty \quad (s \to \infty), \tag{58}$$

so gibt es eine gerade, mit 2π *periodische Funktion* $\varphi(t)$, *deren* Fourier*-Reihe an der Stelle* $t = 0$ *divigiert, für die aber trotzdem die Bedingungen*

$$\varphi(t) = O\left(\frac{\eta\left(\frac{1}{t}\right)}{G\left(\frac{1}{t}\right)}\right) \qquad (t \to +0) \tag{59}$$

und

$$\alpha_n = o\left(\frac{1}{\Lambda_n}\right) \quad \textit{für alle zulässigen } \varrho \tag{60}$$

erfüllt sind.

Wir machen hierbei die zusätzliche Voraussetzung[30])

$$\gamma(s) \nearrow +\infty \quad (s \to \infty). \tag{61}$$

Beweis. Man darf nach Hilfssatz 1 o. B. d. A. annehmen, daß

$$\eta(s) \nearrow +\infty \quad \text{und} \quad (63)\ \frac{\gamma(s)}{\eta(s)} \nearrow +\infty \tag{62}$$

gilt. Wendet man nun Satz 3.1 mit $\frac{\gamma}{\eta}$ statt γ an, so ergibt sich die Behauptung.

---

[30]) In wie weit man sich von dieser Voraussetzung befreien kann, wollen wir hier nicht untersuchen.

Wir möchten noch bemerken, daß den eben bewiesenen Sätzen natürlich analoge Sätze bei konjugierten Reihen entsprechen. Allerdings besteht bei Satz 3.1′ die Einschränkung (13*), so daß man zusätzlich etwa noch

(64) $$G(s) \nearrow +\infty \quad (s \to \infty)$$ [31])

voraussetzen muß.

[31]) (13*) folgt dann wegen (57)!

Literaturverzeichnis.

Ananda Rau, K.

[1]. „Note on a theorem of Mr. Hardy's", Proc. London Math. Soc. (2), 17 (1918), 334—336.

[2]. „An example in the theory of summability by Riesz's typical means", Proc. London Math. Soc. (2), 30 (1930), 367—372.

Gagaev, B. M.

[3]. „Zur Konvergenz von trigonometrischen Reihen", C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS, N. S. 59 (1948), 5—8.

Hardy, G. H.

[4]. „An extension of a theorem on oscillating series", Proc. London Math. Soc. (2), 12 (1912), 174—180.

Hardy, G. H. and Littlewood, J. E.

[5]. „Two theorems concerning Fourier series", Journal London Math. Soc., 1 (1926), 19—25.

[6]. „Notes on the theory of series (XVII): Some new convergence criteria for Fourier series", Journal London Math. Soc., 7 (1932), 252—256.

[7]. „Notes on the theory of series (XVII): Some new convergence criteria for Fourier series", Annali Scuola Norm. Sup. Pisa (2), 3 (1934), 43—62.

Iyengar, K. S. K.

[8]. „A Tauberian theorem and its application to convergence of Fourier series", Proc. Indian. Acad. Sci., Sect. A 18 (1943), 81—87.

[9]. „New convergence and summability tests for Fourier series", Proc. Indian. Acad. Sci., Sect. A 18 (1943), 113—120.

Morgan, G. W.

[10]. „On the new convergence criteria of Fourier series of Hardy and Littlewood", Annali Scuola Norm. Sup. Pisa (2), 4 (1936), 373—382.

[11]. „On the uniform convergence of Fourier series", Journal London Math. Soc., 11 (1936), 162—167.

Sunouchi, G.

[12]. „Notes on Fourier Analysis: I. On the convergence test of Fourier series", Mathematica Japonicae, 1 (1948), 41—44.

Wang, F. T.

[13]. „A note on summability of Fourier series", Science Rep. Tohoku Imp. Univ. (1), 24 (1936), 697—700.

[14]. „On Riesz summability of Fourier series", Proc. London Math. Soc. (2), 47 (1942), 308—325.

(Eingegangen am 17. Juli 1950.)

Mathematische Zeitschrift, Band 53, Heft 4, S. 340–356 (1950).

Über Systeme hyperbolischer Differentialgleichungen erster Ordnung. II.

Von

Wolfgang Haack und Günter Hellwig in Berlin-Charlottenburg.

Einleitung.

Die folgenden Untersuchungen sind eine unmittelbare Fortsetzung unserer ersten Mitteilung über diesen Gegenstand, die kürzlich in dieser Zeitschrift erschienen ist. Im I. Abschnitt der ersten Mitteilung gingen wir von einem hyperbolischen System linearer Differentialgleichungen aus:

$$\begin{aligned} &a^k u_k + b^k v_k + c\,u + d\,v + e = 0, \\ &\bar{a}^k u_k + \bar{b}^k v_k + \bar{c}\,u + \bar{d}\,v + \bar{e} = 0. \end{aligned} \qquad \text{(summiert über } k = 1, 2) \tag{1}$$

Durch invariante Ableitungen in den charakteristischen Richtungen

$$\dot{x}^i = a^i; \quad \dot{x}^i = \bar{a}^i \tag{2}$$

und geeignete Linearkombinationen

$$U = u + \varrho\,v; \quad V = u + \sigma\,v \tag{3}$$

wurde das System (1) auf eine Normalform gebracht. In den Abschnitten II und III wurden Existenzsätze für die Funktionen U, V und u, v bewiesen.

Wir haben im folgenden die Abschnitte und Formeln fortlaufend gezählt und behandeln im Abschnitt IV einige Integralsätze. Zu dem Vektorsystem (2) gehören zwei PFAFF'sche Formen ω_1, ω_2 (I 13). Sind nun U, V bzw. u, v Lösungen von (1) und W, Z willkürliche Funktionen, so gelangt man durch äußere Ableitung der PFAFF'schen Form $WV\omega_1 + ZU\omega_2$ zu Integralrelationen für die Funktionen U, V. Die Forderung, daß gewisse Glieder in den Integralen verschwinden, führt zu dem *adjungierten System* von Differentialgleichungen für W und Z.

Man kann ähnlich wie bei der *RIEMANN'schen Methode*, die aus der Theorie einer partiellen Differentialgleichung II. Ordnung bekannt ist, das CAUCHY'sche Anfangswertproblem des Systems (1) durch Quadraturen lösen, wenn das charakteristische Anfangswertproblem für das adjungierte System gelöst ist. Das Ergebnis ist die Integraldarstellung der gesuchten Funktionen (IV 28, 31). Abschnitt IV schließt mit dem Nachweis, daß die klassische RIEMANN'sche Methode als Sonderfall in diesen Integraldarstellungen enthalten ist.

Im Abschnitt V werden die Überlegungen auf quasilineare Systeme übertragen. Es ergeben sich Systeme in charakteristischer Form, die von R. Courant u. a. (siehe erste Mitteilung Fußnote 2) untersucht wurden. Wir zeigen, daß auch hier stets eine Normalform vorhanden ist, weisen darauf hin, wann durch Vertauschen der abhängigen und unabhängigen Veränderlichen eine „Linearisierung" möglich ist und skizzieren kurz ein Differenzenverfahren für die angenäherte Lösung der verschiedenen Anfangs- und Randwertprobleme. Zum Schluß wird als Beispiel die ebene und rotationssymmetrische stationäre Strömung einer idealen kompressiblen Flüssigkeit behandelt. Wir berechnen die Normalform des Problems und gelangen zu einem Charakteristikenverfahren zur angenäherten Bestimmung der Lösung, welches auch im rotationssymmetrischen Fall die Epizykloiden-Netze verwendet und dadurch gewisse Vereinfachungen gegenüber den bekannten Verfahren (vgl. Abschnitt V, Fußnote 3) bieten dürfte.

Schließlich wollen wir nicht versäumen, Herrn L. Bieberbach für die Durchsicht des Manuskripts beider Teile und für zahlreiche Verbesserungsvorschläge aufrichtig zu danken.

Abschnitt IV.

Quasi-Riemann'sche Methode.

1. Integralsatz der Normalform. Der Aufbau der Charakteristikentheorie eines Systems (1) mittels Pfaff'scher Formen, wie er in Abschnitt I durchgeführt wurde, bringt den Vorteil, daß man unmittelbar Aussagen über das Verhalten der gesuchten Funktionen im Großen machen kann. Mit E. Cartan bezeichnen wir das „äußere Produkt" zweier Pfaff'scher Formen ω_1, ω_2 mit $[\omega_1, \omega_2]$ und die „äußere Ableitung" einer Pfaff'schen Form mit $[d\omega]$. Ist G ein Gebiet, in dem die Koeffizienten der Form ω stetig differenzierbar sind, so gilt der Integralsatz [1])

$$\oint_{\text{Rand von } G} \omega = \int\int_G [d\omega]. \tag{IV 1}$$

Zu einem System hyperbolischer Differentialgleichungen (1) gehören nach Abschnitt I zwei Pfaff'sche Formen ω_1 und ω_2. Sie bilden die Basis eines Formenringes, den wir mittels zweier Hilfsfunktionen $W(x^1, x^2)$, $Z(x^1, x^2)$ in der Form schreiben

$$\omega = W V \omega_1 + Z U \omega_2. \tag{IV 2}$$

[1]) Vgl. z. B. W. Blaschke „Einführung in die Differentialgeometrie" Berlin 1950. E. Kähler „Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen" 1934 (Seite 3—10).

In der Bezeichnungsweise folgen wir E. Kähler, schreiben aber mit A. Dinghas $[d\omega]$ für die äußere Ableitung der Form ω.

Dabei sind U, V als Lösungen der Normalform (I 9)

$$\text{(IV 3)} \qquad \begin{aligned} U_z &= AU + BV + C, \\ V_{\bar z} &= \bar A U + \bar B V + \bar C \end{aligned}$$

zu denken. Die Anwendung des Integralsatzes (IV 1) auf die Form ω (IV 2) gibt

$$\text{(IV 4)} \qquad \oint (W V \omega_1 + Z U \omega_2) = \int\int [d(W V \omega_1 + Z U \omega_2)].$$

Zur Umformung der rechten Seite verwenden wir die für äußere Ableitungen bekannten Grundformeln [1]):

Ist S eine Ortsfunktion, so gilt

$$\text{(IV 5)} \qquad [d(S\omega)] = [(dS)\cdot\omega] + S[d\omega].$$

Ferner ist, bezogen auf die invarianten Ableitungen,

$$\text{(IV 6)} \qquad dS = S_z \omega_1 + S_{\bar z} \omega_2 .$$

Daher wird das Doppelintegral von (IV 4)

$$\text{(IV 7)} \qquad \begin{aligned} &\int\int [d(W V \omega_1 + Z U \omega_2)] \\ &= \int\int \{[d(W V)\cdot \omega_1] + [d(Z U)\cdot \omega_2] + W V [d\omega_1] + Z U [d\omega_2]\}. \end{aligned}$$

Da die äußeren Produkte alternierend sind, folgt

$$\text{(IV 8)} \qquad \begin{aligned} \int\int [d(W V \omega_1 + Z U \omega_2)] &= \int\int \{(W V)_{\bar z} - (Z U)_z\} [\omega_2 \omega_1] \\ &\quad + \int\int \{W V [d\omega_1] + Z U [d\omega_2]\}. \end{aligned}$$

Die äußeren Ableitungen $[d\omega_1]$, $[d\omega_2]$ werden gegeben durch die Gleichungen

$$\text{(IV 9)} \qquad \begin{aligned} [d\omega_1] &= S[\omega_2 \omega_1]; \\ [d\omega_2] &= -R[\omega_2 \omega_1] \end{aligned}$$

mit

$$S = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x^2} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x^1}\right); \quad R = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial \bar\alpha_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \bar\alpha_1}{\partial x^2}\right)$$

und

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \bar\alpha_1 & \bar\alpha_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Gehen wir damit in (IV 8), so wird der Integralsatz:

$$\text{(IV 10)} \qquad \begin{aligned} &\oint (W V \omega_1 + Z U \omega_2) \\ &= \int\int \{(W V)_{\bar z} - (Z U)_z + W V S - Z U R\} [\omega_2 \omega_1]. \end{aligned}$$

Beachten wir jetzt, daß U, V als Lösungen der Normalform (IV 3) gedacht sind, so können wir U_α und $V_{\bar\alpha}$ in (IV 10) nach (IV 3) ersetzen und erhalten

$$\begin{aligned}\oint (W\,V\,\omega_1 + Z\,U\,\omega_2) = &\int\int V\{W_{\bar\alpha} + W(\bar B + S) - Z\,B\}\,[\omega_2\omega_1]\\ &+ \int\int U\{-Z_\alpha - Z(A+R) + W\bar A\}\,[\omega_2\omega_1]\\ &+ \int\int \{W\bar C - Z\,C\}\,[\omega_2\omega_1].\end{aligned} \tag{IV 11}$$

Dieses ist ein allgemeiner Integralsatz, dem jedes Lösungssystem von (IV 3) *bei beliebigen Funktionen W, Z genügen muß.*

2. Verallgemeinerung der Riemann'schen Methode. Es liegt nahe, mittels des Integralsatzes (IV 11) das Cauchy'sche Anfangswertproblem von (IV 3) für eine Kurve K auf ein „charakteristisches Anfangswertproblem" (Abschnitt III) zurückzuführen.

Wir stellen für die willkürlichen Funktionen W, Z die Forderung

$$\begin{aligned} W_{\bar\alpha} + W(\bar B + S) - Z\,B &= 0\\ Z_\alpha + Z(A+R) - W\bar A &= 0.\end{aligned} \tag{IV 12}$$

Das ist ein System partieller Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typus für die Funktionen W und Z in der Normalform mit den gleichen Charakteristiken $\alpha, \bar\alpha$. Wir nennen es das zu (IV 3) *adjungierte System.* Das adjungierte System ist insofern einfacher als das ursprüngliche (IV 3), da es stets homogen ist; es ist aber nur dann durch Quadraturen lösbar nach der Begriffsbestimmung vom Abschnitt I, wenn das Ausgangssystem (IV 3) durch Quadraturen lösbar ist. Sind in (IV 11) W und Z bekannte adjungierte Funktionen, d. h. Lösungen von (IV 12), so treten unter dem verbleibenden Doppelintegral nur bekannte Funktionen auf. Es wird nun darauf ankommen, das Randintegral durch Wahl eines geeigneten Bereiches so umzuformen, daß die gesuchten Funktionen U, V vor die Integrale treten. Bei dem Cauchy'schen Anfangswertproblem sind U, V längs einer Kurve K gegeben, gesucht sind die Funktionswerte $U(P)$, $V(P)$ in einem beliebigen Punkt P außerhalb K.

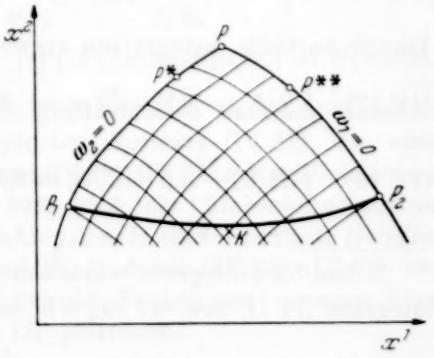

Fig. 1.

Wir betrachten ein Gebiet G, dessen Rand von der Anfangskurve K und den Charakteristiken durch den Punkt P gebildet wird (Fig. 1). Für dieses Gebiet G sind die

Voraussetzungen des Integralsatzes erfüllt. Wie aus Fig. 1 ersichtlich, kann man das Randintegral in die Teilintegrale zerlegen

$$\text{(IV 13)} \qquad \oint = \int_{P_1 P_2} + \int_{P_2 P} + \int_{P P_1}.$$

Das erste Integral ist längs der Anfangskurve K zu nehmen, auf der U, V bekannt sind. Zur Umformung der Integrale über die Charakteristiken beachten wir die Gleichungen (IV 3) und schreiben sie in der Form

$$\text{(IV 14)} \qquad B V = U_x - A U - C; \quad \bar{A} U = V_{\bar{a}} - \bar{B} V - \bar{C}.$$

Um künftig die Nullstellen der gegebenen Funktionen B und $\bar{A}$ nicht ausschließen zu müssen, wollen wir *auf dem Rand* $P_1 P$ die adjungierte Funktion W und *auf dem Rand* $P_2 P$ die adjungierte Funktion Z in der Form schreiben[2])

$$\text{(IV 15)} \qquad W = \mathfrak{W} B \text{ auf } P P_1; \quad Z = \mathfrak{Z} \bar{A} \text{ auf } P P_2.$$

Die Möglichkeit eines solchen Ansatzes ergibt sich unmittelbar daraus, daß für die adjungierten Funktionen W, Z charakteristische Anfangswerte gesucht werden sollen, das heißt, daß wir über W und Z auf den entsprechenden Charakteristiken durch P verfügen können. Wir gehen mit (IV 14, 15) in die Teilintegrale von (IV 13) und beachten, daß $\omega_2 = 0$ längs der Charakteristik $P_1 P$ und $\omega_1 = 0$ längs $P_2 P$ gilt. Dann folgt aus (IV 11)

$$\text{(IV 16)} \qquad \begin{aligned} &\int_{P_1 P_2} (W V \omega_1 + Z U \omega_2) + \int_{P_2 P} \mathfrak{Z} (V_{\bar{a}} - \bar{B} V - \bar{C}) \omega_2 \\ &\quad + \int_{P P_1} \mathfrak{W} (U_x - A U - C) \omega_1 = \iint (W \bar{C} - Z C) [\omega_2 \omega_1]. \end{aligned}$$

Durch partielle Integration ergeben sich die Formeln:

$$\text{(IV 17)} \qquad \int_{P P} \mathfrak{Z} (V_{\bar{a}} - \bar{B} V - \bar{C}) \omega_2 = \mathfrak{Z} V \Big|_{P_2}^{P} - \int_{P_2 P} V (\mathfrak{Z}_{\bar{a}} + \bar{B} \mathfrak{Z}) \omega_2 - \int_{P_2 P} \mathfrak{Z} \bar{C} \omega_2$$

$$\text{(IV 18)} \qquad \int_{P P_1} \mathfrak{W} (U_x - A U - C) \omega_1 = \mathfrak{W} U \Big|_{P}^{P_1} - \int_{P P_1} U (\mathfrak{W}_x + A \mathfrak{W}) \omega_1 - \int_{P P_1} \mathfrak{W} C \omega_1.$$

---

[2]) Das Nächstliegende würde sein, in den Charakteristikenteilen des Randintegrales (IV 11) bzw. (IV 13), z. B. in dem Integral $\int_{P_2 P} Z U \omega_2$ die Funktion U nach (IV 14) zu ersetzen durch $U = \frac{1}{A} (V_{\bar{a}} - \bar{B} V - \bar{C})$ und dann durch partielle Integration bezüglich $V_{\bar{a}}$ die Funktion V vor das Integral zu ziehen. Das läßt sich aber nur durchführen, wenn $\bar{A} \neq 0$ ist. Durch die Einführung der Hilfsfunktionen $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{Z}$ nach (IV 15) wird diese Schwierigkeit behoben.

Wir stellen nunmehr für $\mathfrak{W}, \mathfrak{Z}$ längs der entsprechenden Charakteristiken durch P die Forderung:

$$\mathfrak{Z}_{\bar{u}} + \bar{B}\mathfrak{Z} = 0 \quad \text{auf } P_2P, \tag{IV 19}$$

$$\mathfrak{W}_u + A\mathfrak{W} = 0 \quad \text{auf } PP_1. \tag{IV 20}$$

Daraus folgt für $\mathfrak{Z}$ in einem beliebigen Punkt P^{**} von PP_2 und für $\mathfrak{W}$ in einem beliebigen Punkt P^* von PP_1 (s. Bild 1)

$$\mathfrak{Z}(P^{**}) = C_2 e^{-\int_{P_2}^{P^{**}} \bar{B}\,\omega_2} \quad \text{auf } PP_2, \tag{IV 21}$$

$$\mathfrak{W}(P^*) = C_1 e^{-\int_{P_1}^{P^*} A\,\omega_1} \quad \text{auf } PP_1. \tag{IV 22}$$

Dabei sind C_1 und C_2 Integrationskonstanten, über die später noch verfügt wird.

Für W, Z folgt dann gemäß (IV 15) die Forderung:

$$Z(P^{**}) = C_2 \bar{A}(P^{**})\, e^{-\int_{P_2}^{P^{**}} \bar{B}\,\omega_2} \quad \text{auf } PP_2, \tag{IV 23}$$

$$W(P^*) = C_1 B(P^*) e^{-\int_{P_1}^{P^*} A\,\omega_1} \quad \text{auf } PP_1. \tag{IV 24}$$

Dieses sind charakteristische Anfangswerte gemäß Abschnitt III für die Lösungen W, Z des adjungierten Systems. Nach diesen Festsetzungen erhält der Integralsatz (IV 16) schließlich die Gestalt:

$$\begin{aligned}\mathfrak{W}(P)\,U(P) - \mathfrak{Z}(P)\,V(P) = \mathfrak{W}(P_1)\,U(P_1) - \mathfrak{Z}(P_2)\,V(P_2) + \\ + \int_{P_1P} \mathfrak{W} C\,\omega_1 + \int_{PP_2} \mathfrak{Z}\bar{C}\,\omega_2 + \int_{P_1P_2} (W V\,\omega_1 + Z U\,\omega_2) + \\ + \iint \{W\bar{C} - ZC\}\,[\omega_1\omega_2] \equiv H(W, Z).\end{aligned} \tag{IV 25}$$

Wir wollen das bisherige Ergebnis folgendermaßen zusammenfassen:

Sind W, Z Lösungen des adjungierten Systems (IV 12), *die den charakteristischen Anfangsbedingungen* (IV 23), (IV 24) *mit willkürlichen Konstanten C_1, C_2 genügen, dann läßt sich die Linearkombination $\mathfrak{W}U - \mathfrak{Z}V$ im Punkt P durch die Anfangswerte und bekannte Größen ausdrücken gemäß* (IV 25). *Dabei sind $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{Z}$ durch* (IV 21), (IV 22) *erklärt. Wir wollen W, Z „Quasi-RIEMANN'sche Funktionen" nennen, ihre Existenz ist nach Abschnitt II und III gesichert.*

Das weitere Ziel wird sein, durch geeignete Wahl der Konstanten C_1, C_2 zwei unabhängige Linearkombinationen zu gewinnen, aus denen U, V im Punkt P berechnet werden kann. Dies ist auf verschiedene Arten möglich.

Wünscht man eine gewisse Symmetrie in den Formeln, so kann man durch die Forderung

(IV 26) $$\text{I. } \mathfrak{W}(P) = 1; \quad \mathfrak{Z}(P) = 1$$

in (IV 21, 22) die Konstanten C_1 und C_2 und nach (IV 23, 24) die Funktionen W, Z eindeutig festlegen. Ein zweites Funktionenpaar $\overline{\mathfrak{W}}$, $\overline{\mathfrak{Z}}$ unterwerfen wir der Forderung

(IV 27) $$\text{II. } \overline{\mathfrak{W}}(P) = 1; \quad \overline{\mathfrak{Z}}(P) = -1$$

und erhalten entsprechend eindeutig bestimmte Funktionen $\overline{W}$, $\overline{Z}$. Beachten wir die in (IV 25) angegebene Abkürzung $H(W, Z)$ so folgt unmittelbar

(IV 28a) $$U(P) = \tfrac{1}{2}\{H(W, Z) + H(\overline{W}, \overline{Z})\},$$

(IV 28b) $$V(P) = \tfrac{1}{2}\{H(\overline{W}, \overline{Z}) - H(W, Z)\}.$$

Ist das charakteristische Anfangswertproblem für die adjungierte Normalform gelöst, so läßt sich die Lösung des Cauchy*'schen Anfangswertproblems des Systems* (IV 3) *für jede Anfangskurve K durch Quadraturen darstellen.*

Kürzere Integraldarstellungen ergeben sich auf folgende Weise: Wir wählen die Integrationskonstanten in (IV 21, 22) so, daß

(IV 29) $$\text{I. } \mathfrak{W}(P) = 1; \quad \mathfrak{Z} = 0 \quad \text{auf } PP_2,$$

(IV 30) $$\text{II. } \overline{\mathfrak{Z}}(P) = -1; \quad \overline{\mathfrak{W}} = 0 \quad \text{auf } PP_1.$$

Dadurch sind W, Z, $\overline{W}$, $\overline{Z}$ eindeutig festgelegt. Aus (IV 25) folgt sofort für die gesuchten Funktionen $U(P)$, $V(P)$:

(IV 31a) $$U(P) = \mathfrak{W}(P_1)\,U(P_1) + \int_{P_1 P} \mathfrak{W} C\,\omega_1 + \int_{P_1 P_2} (W V \omega_1 + Z U \omega_2) + \int\int \{W \overline{C} - Z C\}\,[\omega_1 \omega_2],$$

(IV 31b) $$V(P) = -\overline{\mathfrak{Z}}(P_2)\,V(P_2) + \int_{P P_2} \overline{\mathfrak{Z}}\,\overline{C}\,\omega_2 + \int_{P_1 P_2} (\overline{W} V \omega_1 + \overline{Z} U \omega_2) + \int\int \{\overline{W}\,\overline{C} - \overline{Z} C\}\,[\omega_1 \omega\ ].$$

Aus der Integraldarstellung (IV 31) folgt besonders anschaulich, daß U, V stetig von den Anfangswerten abhängen. Schließlich sei bemerkt, daß durch die Integralsätze (IV 28), (IV 31) unmittelbar Integraldarstellungen für die Funktionen u, v des Cauchy'schen Anfangswertproblems des allgemeinen Systems (1) gegeben sind.

3. Beziehungen zur „Riemann'schen Methode". Ist eine allgemeine hyperbolische Differentialgleichung II. Ordnung in der Form (I 17) gegeben, in der wir die unabhängigen Variablen mit x, y bezeichnen

(IV 32) $$z_{xy} + a z_x + b z_y + c z + f = 0,$$

so können wir diese durch die Einführung der beiden Funktionen

$$u = z; \quad v = z_x \tag{IV 33}$$

als System schreiben. Nach (I 19) ergibt sich dazu die Normalform

$$\begin{aligned} U_x &= -bU + V, \\ V_y &= (b_y + ab - c)U - aV - f \end{aligned} \tag{IV 34}$$

mit

$$u = U; \quad bu + v = V;$$

denn es ist nach (I 18) und (I 1) $U_x = U_x$; $V_{\bar{a}} = V_y$.

Zu (IV 34) gehören die zwei PFAFF'schen Formen (I 13)

$$\omega_1 = dx; \quad \omega_2 = dy. \tag{IV 35}$$

Aus dem Integralsatz (IV 25) erhalten wir sofort unendlich viele Integraldarstellungen für ein CAUCHY'sches Anfangswertproblem von (IV 32). Es ist nun von Interesse, ob und gegebenenfalls durch welche „ausgezeichneten" Forderungen diese Integraldarstellungen gerade die bekannte „RIEMANN'sche Auflösungsformel" liefern.

Wir werden zeigen: Stellen wir für das charakteristische Anfangswertproblem des „adjungierten Systems" (IV 12) *neben den Forderungen* (IV 19, 20) *die Forderung* (IV 29) *zur Festlegung der Integrationskonstanten, so liefert* (IV 31 a) *genau die* RIEMANN*'sche Auflösungsformel.*

Das adjungierte System (IV 12) wird

$$\begin{aligned} W_y - Wa - Z &= 0, \\ Z_x - Zb - W(b_y + ab - c) &= 0. \end{aligned} \tag{IV 36}$$

Die Forderungen für das charakteristische Anfangswertproblem von (IV 36) werden nach (IV 15) und (IV 20) wegen $B = 1$

$$W_x - bW = 0 \quad \text{auf } PP_1, \qquad \text{mit } W(P) = 1 \tag{IV 37}$$

$$Z = 0 \quad \text{auf } PP_2, \qquad \text{nach (IV 29).} \tag{IV 37 a}$$

Aus (IV 36) elimieren wir Z, indem wir die erste Gleichung nach x differenzieren und Z_x aus der zweiten einsetzen.

Nach leichter Umformung folgt

$$W_{xy} - (Wa)_x - (Wb)_y + Wc = 0. \tag{IV 38}$$

(IV 38) *ist genau die zu* (IV 32) *gehörige „adjungierte Gleichung" von* RIEMANN.

Die Forderung (IV 37 a) geht nach (IV 36) über in

$$W_y - aW = 0 \quad \text{auf } PP_2. \tag{IV 39}$$

Die Forderungen (IV 37, 39) *sind die zu* (IV 38) *gehörigen „*RIEMANN*schen Forderungen".*

Wir setzen nach (IV 33, 34)

$$z = u = U; \quad bz + z_x = V. \tag{IV 40}$$

Jetzt gelangen wir unmittelbar zur RIEMANN'schen Auflösungsformel, wenn wir die Werte (IV 40) in (IV 31 a) einsetzen. Unter Beachtung der ersten Gleichung in (IV 36) wird

$$z(P) = W(P_1)\, z(P_1) + \int_{P_1 P_2} \{W(b\,z + z_x)\, d\,x + (W_y - W\,a)\, z\, d\,y\} - \iint f\, W\, [d\,x\, d\,y]. \tag{IV 41}$$

Dies ist die RIEMANN'sche Darstellungsformel für das CAUCHY'sche Problem der hyperbolischen Differentialgleichung (IV 32). (Vergl. etwa GOURSAT "Cours D'Analyse" Paris 1927, Band 3 Seite 150.)

Abschnitt V. Systeme quasilinearer Differentialgleichungen.

In der Einleitung wurde schon darauf hingewiesen, daß in den letzten 10 Jahren im Zusammenhang mit gewissen Problemen der Strömungslehre Charakteristikenverfahren zur Lösung hyperbolischer Systeme quasilinearer Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen entwickelt wurden[3]). Insbesondere R. COURANT, K. O. FRIEDRICHS und LAX haben kürzlich eingehend die quasilinearen Systeme untersucht und die Voraussetzungen für die Existenz eindeutiger Lösungen des CAUCHY'schen Anfangswertproblems angegeben (vergl. I. Mitteilung Fußnote 2). Wir wollen uns hier darauf beschränken, auf den Zusammenhang der quasilinearen Systeme mit der in den Abschnitten I bis IV entwickelten Theorie der linearen Systeme hinzuweisen und an einem einfachen Beispiel der ebenen und rotationssymmetrischen Strömung kompressibler Flüssigkeiten die Vorteile zu erläutern.

1. Quasilineare Systeme in der „charakteristischen Form".

Es sei

$$\begin{aligned} a^k u_k + b^k v_k + c &= 0, \\ \bar{a}^k u_k + \bar{b}^k v_k + \bar{c} &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(summiert über } k = 1, 2) \tag{V 1}$$

ein quasilineares System, in dem a^k, $\bar{a}^k \ldots \bar{c}$ Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x^1, x^2 und der gesuchten Lösungen u, v sind.

---

[3]) Die reichhaltige Literatur ist auch heute hier noch schwer zugänglich, so daß wir nur die folgende erwähnen können:

R. SAUER, „Theoretische Einführung in die Gasdynamik", Berlin 1943.

Kl. OSWATITSCH, „Über die Charakteristikenverfahren der Hydromechanik", ZAMM 1947, Heft 7, 8, 9.

COURANT-FRIEDRICHS, „Supersonic flow and shock waves", New York 1948.

A. FERRI, „Elements of Aerodynamics of supersonic flows", New York 1949.

In den obigen Arbeiten befinden sich reichhaltige Literaturangaben.

Verfolgen wir die Entwicklungen des Abschnittes I und nehmen an, eine Lösung u, v sei bekannt, so heißt das System (V 1) bezüglich dieser Lösung *hyperbolisch*, wenn die Determinante (I 3) genau zwei reelle Wurzeln $\nu_1 : \nu_2$, $\mu_1 : \mu_2$ besitzt. Dadurch wurden die charakteristischen Richtungen abhängig von den Lösungen u, v, jedoch behalten die Gleichungen (I 1 – 6) des Abschnittes I ihre volle Gültigkeit, indem die Faktoren $\varrho_1, \varrho_2, \sigma_1, \sigma_2$ jetzt Funktionen von x^1, x^2, u, v sein können. Wir gelangen auf diese Weise stets zu dem folgenden „charakteristischen System", in dem wir in den Differentialgleichungen (I 11) der Charakteristiken statt der Punkte die Indices $\alpha, \bar{\alpha}$ verwenden:

$$\text{(V 2a)} \qquad \begin{aligned} &\text{I)} \quad x_\alpha^1 = \alpha^1, \qquad \text{II)} \quad x_{\bar{\alpha}}^1 = \bar{\alpha}^1, \\ &\qquad\; x_\alpha^2 = \alpha^2, \qquad\quad\; x_{\bar{\alpha}}^2 = \bar{\alpha}^2. \end{aligned}$$

Die $\alpha^i, \bar{\alpha}^i$ sind bekannte Funktionen von x^1, x^2, u, v. Dazu kommen entsprechend (I 6) die zugehörigen Differentialgleichungen der Funktionen u, v

$$\text{(V 2b)} \qquad \begin{aligned} \varrho_1 u_\alpha + \varrho_2 v_\alpha &= -\varrho_1 (\nu_1 c + \nu_2 \bar{c}), \\ \sigma_1 u_{\bar{\alpha}} + \sigma_2 v_{\bar{\alpha}} &= -\sigma_1 (\mu_1 c + \mu_2 \bar{c}). \end{aligned}$$

Die Differentialgleichungen (V 2a) der charakteristischen Kurven lassen sich auch in der Gestalt schreiben:

$$\text{(V 2c)} \qquad \text{I)}\ \alpha^2 x_\alpha^1 - \alpha^1 x_\alpha^2 = 0, \quad \text{II)}\ \bar{\alpha}^2 x_{\bar{\alpha}}^1 - \bar{\alpha}^1 x_{\bar{\alpha}}^2 = 0.$$

Jetzt sind die Gleichungen homogen und bleiben bei Einführung integrierender Faktoren erhalten. Daher lassen sich die Richtungsableitungen als partielle Ableitungen deuten. (V 2b) und (V 2c) bilden ein System von 4 partiellen Differentialgleichungen für die Funktionen x^1, x^2, u, v zweier charakteristischer Variablen. Die Eigenschaften und Existenzfragen für die Lösungen solcher Systeme untersuchen R. Courant u. a. (vgl. Fußnote I [2]).

2. Normalform quasilinearer Systeme.

Unsere Theorie der linearen Systeme stützt sich wesentlich auf die Normalform (siehe Abschnitt I). Wir wenden uns der Frage zu, ob das Gleichungssystem (V 2b) eine Normalform im Sinne (I 9) besitzt. Man erkennt sofort die Richtigkeit des Satzes:

a) *Sind* ϱ_i, σ_i *in* (V 2b) *Funktionen allein von* x^1, x^2, *so gelangt man zur Normalform, indem man setzt:*

$$\text{(V 3)} \qquad U = \varrho_1 u + \varrho_2 v; \qquad V = \sigma_1 u + \sigma_2 v.$$

Die Normalform lautet

$$\text{(V 4)} \qquad U_\alpha = C; \qquad V_{\bar{\alpha}} = \bar{C}.$$

Dabei sind C und $\bar{C}$ bekannte Funktionen von x^1, x^2, U, V.

Herr J. Nitsche wies uns darauf hin, daß ein entsprechender Satz auch im allgemeinen Fall gilt:

b) *Sind* ϱ_i, σ_i *in* (V 2b) *differenzierbare Funktionen von* u, v, x^ι, *so besitzt das System eine Normalform.*

Wir haben zu zeigen, daß sich statt u, v neue Funktionen U, V von u, v, x^i einführen lassen, die (V 2b) auf die Gestalt (V 4) bringen. Zu diesem Zweck multiplizieren wir die erste Gleichung (V 2b) mit einer Funktion $M(u, v, x^i)$ und die zweite Gleichung mit $N(u, v, x^i)$ und bestimmen M und N so, daß die folgenden Gleichungen möglich werden:

$$\begin{aligned} M\varrho_1 u_\alpha + M\varrho_2 v_\alpha &= U_\alpha + \chi(u, v, x^i), \\ N\sigma_1 u_{\bar\alpha} + N\sigma_2 v_{\bar\alpha} &= V_{\bar\alpha} + \bar\chi(u, v, x^i). \end{aligned} \tag{V 5}$$

Das ist sicher der Fall, wenn M und N die Gleichungen erfüllen:

$$(M\varrho_1)_v - (M\varrho_2)_u = 0, \qquad (N\sigma_1)_v - (N\sigma_2)_u = 0. \tag{V 6}$$

In diesen Gleichungen sind die x^i als konstante Parameter zu deuten. Dann wird

$$U = \Phi(u, v, x^i); \qquad V = \Psi(u, v, x^i)$$

derart, daß

$$\begin{aligned} U_u &= \Phi_u = M\varrho_1, & U_v &= \Phi_v = M\varrho_2 \\ V_u &= \Psi_u = N\sigma_1, & V_v &= \Psi_v = N\sigma_2 \end{aligned} \tag{V 6a}$$

ist. Durch Differentiation in Richtung der Charakteristiken ergibt sich:

$$\begin{aligned} U_\alpha &= M\varrho_1 u_\alpha + M\varrho_2 v_\alpha + \Phi_{x^i} a^i \\ V_{\bar\alpha} &= N\sigma_1 u_{\bar\alpha} + N\sigma_2 v_{\bar\alpha} + \Psi_{x^i} \bar a^i. \end{aligned}$$

Hier sind die letzten Glieder bekannte Funktionen von u, v, x^i, wenn die integrierenden Faktoren M, N gemäß (V 6) bestimmt sind. Die Funktionaldeterminante der Funktionen U, V bezüglich u, v ist $MN(\varrho_1\sigma_2 - \varrho_2\sigma_1)$. Wegen der Unabhängigkeit von ϱ_i, σ_i sind auch U, V unabhängig bezüglich u, v. Daraus folgt aber sofort, daß sich (V 2b) in der Normalform (V 4) schreiben läßt.

c) Für ein quasilineares System in der Normalform (V 2a, 4) läßt sich der *Integralsatz* (IV 11) übernehmen. Für irgend zwei Lösungen U, V des quasilinearen Systems und zwei willkürliche Funktionen W, Z gilt nach (IV 11) der Integralsatz:

$$\begin{aligned} \oint (W\,V\omega_1 + Z\,U\,\omega_2) = &\int\int V\,\{W_{\bar\alpha} + W\,S\}\,[\omega_2\omega_1] \\ &+ \int\int U\,\{-Z_\alpha - Z\,R\}\,[\omega_2\omega_1] \\ &+ \int\int (W\,\bar C - Z\,C)\,[\omega_2\omega_1] \end{aligned} \tag{V 7}$$

wobei R, S durch (IV 9) gegeben sind.

Durch Nullsetzen der Klammerausdrücke in den beiden Doppelintegralen ergeben sich die *adjungierten Gleichungen.* Nimmt man U, V als bekannt an, so lassen sich die PFAFF'schen Formen integrabel machen und das adjungierte System auf die einfache Gestalt bringen

$$W_{\bar{a}} = 0; \qquad Z_a = 0.$$

Dann sind

$$W = \text{const}, \qquad Z = \text{const}$$

die Gleichungen für die beiden Scharen von Charakteristiken.

d) *Linearisierbare Systeme.* Von hervorragender Bedeutung für die Anwendungen ist der Sonderfall, für den in (V 4)

$$C = \bar{C} \equiv 0.$$

Man kann die Rolle der abhängigen und unabhängigen Veränderlichen vertauschen, d. h. man deutet U, V als unabhängige Variable in einer U, V-Ebene und betrachtet $x^i(U, V)$ als gesuchte Funktionen der unabhängigen Veränderlichen U, V. Dann erscheinen (V 2c) als System von Differentialgleichungen in charakteristischer Form für die Funktionen $x^i(U, V)$. Die Kurven $U = \text{const}$, $V = \text{const}$ sind die Charakteristiken der U, V-Ebene, die fest, d. h. von den gesuchten Funktionen $x^i(U, V)$ unabhängig sind. Damit hat man die gleichen Verhältnisse wie bei den linearen hyperbolischen Systemen und kann die Theorie unmittelbar übertragen. Wir wollen uns mit diesem kurzen Hinweis begnügen (s. unten (4 c)), aber noch bemerken, daß auch in allgemeineren Fällen eine derartige „Linearisierung" möglich ist, z. B. wenn C, α^i Funktionen von U, x^i und $\bar{C}$, $\bar{\alpha}^i$ Funktionen von V, x^i allein sind.

3. Allgemeines Differenzenverfahren.

Von dem Gleichungssystem (V 2a) und (V 4) (bzw. (V 2b)) gelangt man unmittelbar zu Differenzenverfahren, welche das CHAUCHY'sche und alle im Abschnitt III besprochenen gemischten Anfangs- und Randwertprobleme näherungsweise lösen. Nehmen wir zunächst an, die Lösungen der Systeme (V 2a) und (V 4) seien bekannt und s bzw. $\bar{s}$ seien die Bogenlängen längs der Charakteristiken. Dann lassen sich die Gleichungen in Integralform schreiben. Näherungsweise gilt:

$$\text{(V 8)} \qquad \begin{array}{ll} \Delta_a x^1 = \alpha^1 \Delta s & \Delta_{\bar{a}} x^1 = \bar{\alpha}^1 \Delta \bar{s} \\ \text{I)}\ \Delta_a x^2 = \alpha^2 \Delta s, & \text{II)}\ \Delta_{\bar{a}} x^2 = \bar{\alpha}^2 \Delta \bar{s} \\ \Delta_a U = C \Delta s & \Delta_{\bar{a}} V = \bar{C} \Delta \bar{s}. \end{array}$$

Längs der Kurve K seien die Anfangswerte $U(K)$, $V(K)$ gegeben; längs des Randes R möge irgend eine Funktion $\Phi(u, v)$ bzw. $\Psi(U, V)$ bekannt sein (siehe Fig. 2). Beginnend vom Schnittpunkt 0 legt man durch eine Anzahl Punkte (1, 2, 3) von K die charakteristischen Richtungen.

Sie sind als Quotienten der beiden ersten Gleichungen (V 8) längs K bekannt. Diese charakteristischen Geraden schneiden sich paarweise in den Punkten 5, 6, 7. Normiert man $\sum(\alpha^i)^2 = 1$ und $\sum(\bar{\alpha}^i)^2 = 1$, so ist Δs bzw. $\Delta \bar{s}$ der Abstand der Punkte auf der α- bzw. $\bar{\alpha}$-Linie. Man kann also $\Delta_\alpha U$ und $\Delta_{\bar{\alpha}} V$ berechnen und U, V in den Punkten 5, 6, 7 bestimmen.

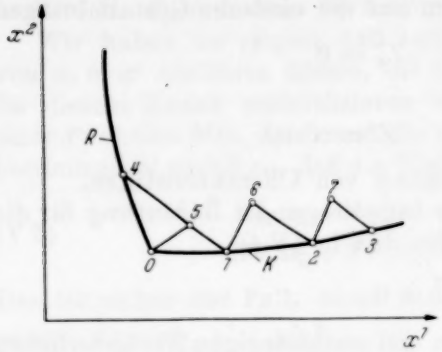

Fig. 2.

Angenommen die im Randpunkt 4 ankommende Charakteristik gehöre zur Schar II der Gleichungen (V 8), dann kennt man in 4 die Funktion V und kann aus V und der Randbedingung $\Psi(U, V)$ die Funktion U (bzw. u, v) berechnen. Dabei ist vorausgesetzt, daß Ψ nach U eindeutig auflösbar ist. Das Verfahren läßt sich in gleicher Weise in dem zwischen K und R gelegenen Gebiet fortsetzen. Bezüglich der Randkurve R ist vorauszusetzen, daß in dem Gebiet zwischen K und R eine und nur eine durch 0 gehende Charakteristik liegt.

4) Stationäre Strömung.

Als Beispiel soll die rotationssymmetrische und ebene stationäre Strömung eines idealen Gases etwas ausführlicher behandelt werden. In Anbetracht der umfangreichen Literatur über diesen Gegenstand [3]) dürfen wir uns kurz fassen. In Zylinderkoordinaten r, x sei $\varphi(r, x)$ das Geschwindigkeitspotential und a die lokale Schallgeschwindigkeit. Dann gilt die Gleichung:

$$\text{(V 9)} \qquad \varphi_{xx}\left(1 - \frac{\varphi_x^2}{a^2}\right) + \varphi_{rr}\left(1 - \frac{\varphi_r^2}{a^2}\right) - 2\,\varphi_{xr}\,\frac{\varphi_r \varphi_r}{a^2} + \frac{\varphi_r}{r} = 0.$$

Dabei ist mit den Konstanten $\varkappa > 1$, $w_0 \geqq w$

$$\text{(V 10)} \qquad a^2 = \frac{\varkappa - 1}{2}(w_0^2 - w^2), \quad w^2 = \varphi_x^2 + \varphi_r^2.$$

Setzen wir

$$\text{(V 11)} \qquad \varphi_x = w\cos\vartheta, \quad \varphi_r = w\sin\vartheta,$$

so ergibt sich aus (V 9) und der Bedingung

$$\text{(V 12)} \qquad \frac{\partial}{\partial r}(w\cos\vartheta) = \frac{\partial}{\partial x}(w\sin\vartheta)$$

ein quasilineares System von Differentialgleichungen für die Funktionen w, ϑ, die den Betrag und die Richtung der Strömungsgeschwindigkeit gegen die x-Achse angeben. Für $w > a$ ist das System hyperbolisch.

Es empfiehlt sich hier, nicht unmittelbar auf die „charakteristischen" Ableitungen $\alpha, \bar{\alpha}$, sondern zunächst auf ein anderes System „invarianter" Ableitungen überzugehen.

Es sind

$$\text{(V 13)} \qquad \begin{aligned} \beta) \quad & \dot{x} = w \cos \vartheta \\ & \dot{r} = w \sin \vartheta, \\ \bar{\beta}) \quad & \dot{x} = -\, w \operatorname{tg} \gamma \sin \vartheta \\ & \dot{r} = w \operatorname{tg} \gamma \cos \vartheta \end{aligned}$$

zwei Vektoren, von denen β mit dem Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{w}$ zusammenfällt und $\bar{\beta}$ senkrecht dazu ist. Dabei ist γ der sogenannte „Mach'sche Winkel" mit $\sin \gamma = \frac{a}{w}$ (vgl. Fig. 3). Die invarianten Ableitungen einer Funktion S in diesen Richtungen sind

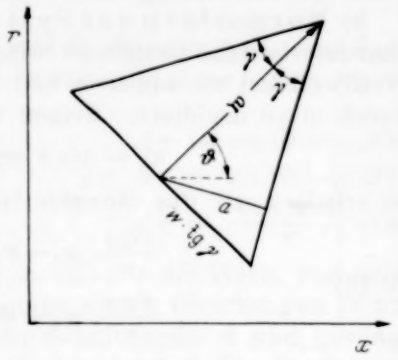

Fig. 3.

$$\text{(V 14)} \qquad \begin{aligned} S_\beta &= \frac{\partial S}{\partial x}\, w \cos \vartheta + \frac{\partial S}{\partial r}\, w \sin \vartheta \\ S_{\bar{\beta}} &= -\, \frac{\partial S}{\partial x}\, w \operatorname{tg} \gamma \sin \vartheta + \frac{\partial S}{\partial r}\, w \operatorname{tg} \gamma \cos \vartheta . \end{aligned}$$

Berechnet man diese Ableitungen für die Funktionen w und ϑ und beachtet (V 9) und (V 12), so folgt nach einfacher Zwischenrechnung das System invarianter Differentialgleichungen:

$$\text{(V 15)} \qquad \begin{aligned} w_\beta \cdot \operatorname{ctg} \gamma - \vartheta_{\bar{\beta}} \cdot w &= \frac{w^2}{r}\, \frac{\sin \vartheta}{\operatorname{ctg} \gamma}, \\ w_{\bar{\beta}} \cdot \operatorname{ctg} \gamma - \vartheta_\beta \cdot w &= 0 . \end{aligned}$$

a) Natürliche Gleichungen: Die Formeln (V 15) gestatten eine einfache geometrische Deutung. Bezeichnet man mit s die Bogenlänge und mit ϱ_s den Krümmungsradius der Stromlinien, dann wird wegen (V 14)

$$\text{(V 16a)} \qquad \vartheta_\beta = w \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{1}{\varrho_s}\, w \qquad \left(\text{wegen } \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{1}{\varrho_s}\right).$$

Nennen wir n und ϱ_n die Bogenlänge und den Krümmungsradius der Orthogonaltrajektorien der Stromlinien, so wird nach (V 14)

$$\text{(V 16b)} \qquad \vartheta_{\bar{\beta}} = w \cdot \operatorname{tg} \gamma \cdot \frac{d\vartheta}{dn} = \frac{w \cdot \operatorname{tg} \gamma}{\varrho_n} .$$

Durch Einsetzen in (V 15) ergeben sich die sogenannten *natürlichen Gleichungen der Strömung*

$$\text{(V 17)} \qquad \begin{aligned} \frac{d \ln w}{ds} &= \operatorname{tg}^2 \gamma \left(\frac{1}{\varrho_n} + \frac{\sin \vartheta}{r}\right) \\ \frac{d \ln w}{dn} &= \frac{1}{\varrho_s} . \end{aligned}$$

Sie lassen sich auf diese Weise recht mühelos gewinnen. Man erkennt, daß sich bei der Strömung längs einer Wand w nur dann stetig ändert, wenn die Krümmung der Wand stetig ist.

b) Normalform des Systems. Um das Gleichungssystem auf die charakteristische Gestalt zu bringen, haben wir die beiden Gleichungen (V 15) einmal zu addieren und einmal zu subtrahieren und schließlich durch w zu dividieren. Setzen wir noch

$$w_\alpha = w_\beta + w_{\bar\beta}, \quad w_{\bar\alpha} = w_\beta - w_{\bar\beta},$$

so erhalten wir das *charakteristische System*

$$\text{(V 18)} \qquad \begin{aligned} \frac{\operatorname{ctg}\gamma}{w}\, w_\alpha - \vartheta_\alpha &= \frac{w}{r}\sin\vartheta\cdot\operatorname{tg}\gamma, \\ \frac{\operatorname{ctg}\gamma}{w}\, w_{\bar\alpha} + \vartheta_{\bar\alpha} &= \frac{w}{r}\sin\vartheta\cdot\operatorname{tg}\gamma. \end{aligned}$$

Dabei sind die charakteristischen Richtungen α, $\bar\alpha$, wie ein Vergleich mit (V 14) zeigt, gegeben durch

$$\text{(V 19)} \qquad \begin{matrix} \alpha) \\ \end{matrix} \quad \begin{aligned} \dot x &= \frac{w}{\cos\gamma}\cos(\gamma+\vartheta) \\ \dot r &= \frac{w}{\cos\gamma}\sin(\gamma+\vartheta) \end{aligned} \qquad , \qquad \begin{matrix} \bar\alpha) \\ \end{matrix} \quad \begin{aligned} \dot x &= \frac{w}{\cos\gamma}\cos(\vartheta-\gamma) \\ \dot r &= \frac{w}{\cos\gamma}\sin(\vartheta-\gamma). \end{aligned}$$

Da in (V 18) der Faktor $\frac{\operatorname{ctg}\gamma}{w}$ Funktion von w allein ist, besitzt das System eine Normalform mit den Funktionen

$$\text{(V 20)} \qquad U = \int \frac{\operatorname{ctg}\gamma}{w}\, dw - \vartheta, \quad V = \int \frac{\operatorname{ctg}\gamma}{w}\, dw + \vartheta.$$

Die Normalform lautet:

$$\text{(V 21)} \qquad U_\alpha = \frac{w}{r}\sin\vartheta\operatorname{tg}\gamma, \quad V_{\bar\alpha} = \frac{w}{r}\sin\vartheta\cdot\operatorname{tg}\gamma,$$

dabei sind w, ϑ als Funktionen von U, V anzusehen.

c) Betrachten wir zunächst den Grenzfall $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{1}{r} = 0$.

Die Gleichungen (V 19) bis (V 21) gehen über in die Formeln für die *ebene Strömung*, für die also gilt:

$$U_\alpha = 0, \qquad V_{\bar\alpha} = 0.$$

Die Kurven $U = \text{const}$, $V = \text{const}$ bilden ein festes Netz in der w, ϑ-Ebene und sind die Charakteristiken des *linearen* Systems (V 19), wenn man dieses in den x_α, r_α und $x_{\bar\alpha}$, $r_{\bar\alpha}$ gemäß (V 2 c) schreibt. Die Linearisierung der Differentialgleichung der ebenen Strömung durch Vertauschen der abhängigen und unabhängigen Variablen ist seit langem bekannt (vgl. etwa R. Sauer [1]) Seite 111). Die Kurven $U = \text{const}$, $V = \text{const}$ sind Epizykloiden der w, ϑ-Ebene. Die Epizykloidennetze sind in verschiedenen Maßstäben im Handel und werden zur angenäherten Bestimmung der ebenen Strömung viel verwendet.

d) Auch für die *rotationssymmetrische Strömung* lassen sich die Zykloidennetze mit Vorteil verwenden, was unseres Wissens in der Literatur bisher nicht erwähnt ist. Wir wollen deshalb das Verfahren kurz erläutern:

Längs der Charakteristiken wählen wir die Bogenlängen s und $\bar{s}$ als Parameter. Dann lassen sich (V 19) und (V 21) angenähert in Differenzen schreiben:

$$\text{(V 22)} \qquad \alpha)\ \begin{aligned} \Delta x &= \cos(\gamma+\vartheta)\,\Delta s \\ \Delta r &= \sin(\gamma+\vartheta)\,\Delta s\,, \\ \Delta U &= \frac{\sin\gamma\sin\vartheta}{r}\,\Delta s \end{aligned} \qquad \bar{\alpha})\ \begin{aligned} \Delta x &= \cos(\vartheta-\gamma)\,\Delta\bar{s} \\ \Delta r &= \sin(\vartheta-\gamma)\,\Delta\bar{s} \\ \Delta V &= \frac{\sin\gamma\sin\vartheta}{r}\,\Delta\bar{s}\,. \end{aligned}$$

Kennt man in zwei Punkten P, Q der x, r-Ebene die Werte von w, ϑ (Fig. 4), so berechnet man aus den beiden ersten Gleichungen (V 22) die charakteristischen Tangenten, ihren Schnittpunkt R und gewinnt Δs und $\Delta\bar{s}$. Daraus läßt sich $\Delta U, \Delta V$ bestimmen. Die Werte von $w(R), \vartheta(R)$ lassen sich nun mühelos aus dem Zykloidennetz ablesen. Um das zu zeigen, gehen wir davon aus, daß in (V 20) unbestimmte Integrale auftreten. Da $\frac{\operatorname{ctg}\gamma}{w}$ für $w = a$ verschwindet, können wir in (V 20) die bestimmten Integrale einführen

$$U = \int_a^w \frac{\operatorname{ctg}\gamma}{w}\,dw - \vartheta\,, \qquad V = \int_a^w \frac{\operatorname{ctg}\gamma}{w}\,dw + \vartheta\,.$$

Dann wird für $w = a$

$$U(a,\vartheta) = -\vartheta\,, \qquad V(a,\vartheta) = +\vartheta\,.$$

Fig. 4.

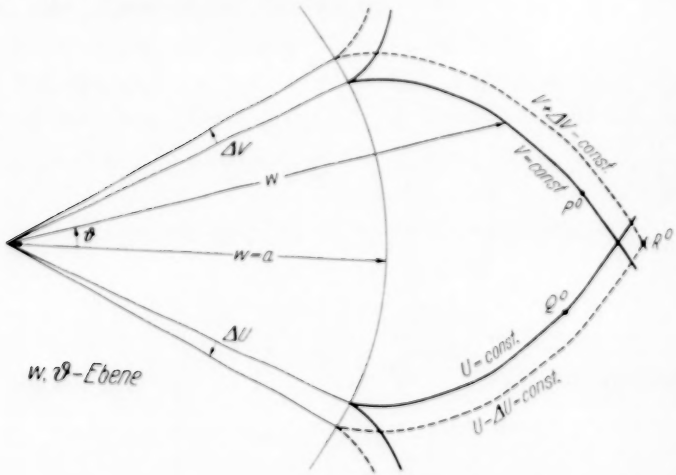

Fig. 5.

Die Größe ΔU erscheint daher auf dem inneren Randkreis $w = a$ des Netzes als $\Delta U = -\Delta\vartheta$ und entsprechend ΔV als $\Delta V = +\Delta\vartheta$. Jetzt ergibt sich folgendes Verfahren (Fig. 5):

Aus den gegebenen $w(P)$, $\vartheta(P)$ und $w(Q)$, $\vartheta(Q)$ findet man durch Zeichnen der entsprechenden Radienvektoren der w, ϑ-Ebene sofort die Punkte P^0, Q^0. Auf der U-Linie des Zykloidennetzes durch Q^0 geht man an den Randkreis ($w = a$), trägt den aus der dritten Gleichung (V 22) berechneten Wert $\Delta U = -\Delta\vartheta$ im Bogenmaß ab und kehrt auf der neuen Netzlinie $U + \Delta U$ zurück. Verfährt man ebenso bei V, so erhält man als Schnitt der neuen Netzlinien den Punkt R^0 und kann $w(R)$, $\vartheta(R)$ unmittelbar ablesen. Da der Übergang von U zu $U + \Delta U$ (bzw. von V zu $V + \Delta V$) lediglich eine starre Drehung der Netzkurven um den Winkel $(-\Delta U)$ bzw. ΔV bedeutet, kann man das Verfahren noch weiter mechanisieren.

(Eingegangen am 18. Juli 1950.)

Mathematische Zeitschrift, Band 53, Heft 4, S. 357—363 (1950).

Abschätzung der Wurzeln algebraischer Gleichungen. II.

Von

Wilhelm Specht in Erlangen.

Vor kurzem habe ich in einer gleich betitelten Arbeit[1]) nachstehenden Satz bewiesen[2]):

Die ihrer absoluten Größe $|\xi_1| \geqq |\xi_2| \geqq \cdots \geqq |\xi_n|$ *nach geordneten Wurzeln* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *einer algebraischen Gleichung*

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

mit komplexen Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *und der Norm*

$$A_1 = (1 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots + |a_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

erfüllen die Ungleichungen

$$|\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_k| \leqq A_1; \quad |\xi_k| \leqq A_1^{\frac{1}{k}} \qquad (\text{für } k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Dies ist, wie ich hier zeigen will, der einfachste Fall einer Kette von Abschätzungen, deren jede die vorangehenden an Güte übertrifft. Gleichzeitig ergibt sich, in Verbindung mit einem Satze von G. Szegö, die wahre, tiefere Quelle aller dieser Abschätzungen.

Satz 1. *Für eine algebraische Gleichung*

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

mit komplexen Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *und den nach ihrer absoluten Größe geordneten Wurzeln* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *bilde man die Größen*

$$\alpha_\mu = a_\mu + \bar{a}_1 a_{\mu+1} + \bar{a}_2 a_{\mu+2} + \cdots + \bar{a}_n a_{\mu+n} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

wobei $a_0 = 1$ *und* $a_r = 0$ *für* $r > n$ *zu setzen ist, und bezeichne mit* A_m *die positive Quadratwurzel aus der (positiven) Determinante*

$$D_m = A_m^2 = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{m-1} \\ \bar{\alpha}_1 & \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{m-2} \\ \bar{\alpha}_2 & \bar{\alpha}_1 & \alpha_0 & \ldots & \alpha_{m-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \bar{\alpha}_{m-1} & \bar{\alpha}_{m-2} & \bar{\alpha}_{m-3} & \ldots & \alpha_0 \end{vmatrix} \qquad (D_0 = A_0^2 = 1). \tag{2}$$

[1]) Vgl. W. Specht, Abschätzungen der Wurzeln algebraischer Gleichungen, Math. Zeitschr. **52** (1949), 310—321.

[2]) Wurzeln aus positiven Zahlen sind durchwegs positiv zu verstehen.

Dann gilt für jedes $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$A_m^2 \geqq A_{m+1} A_{m-1} \tag{3}$$

und für jedes $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$|\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_k| \leqq \frac{A_m}{A_{m-1}} \leqq A_m^{\frac{1}{m}}; \quad |\xi_k| \leqq \left(\frac{A_m}{A_{m-1}}\right)^{\frac{1}{k}} \leqq A_m^{\frac{1}{km}}. \tag{4}$$

In Übereinstimmung mit dem eingangs erwähnten Ergebnis ist

$$D_1 = A_1^2 = \alpha_0 = 1 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots + |a_n|^2.$$

Um die zweite Schranke zu verwenden, hat man die Größen

$$\alpha_1 = a_1 + \bar{a}_1 a_2 + \bar{a}_2 a_3 + \cdots + \bar{a}_{n-1} a_n \quad \text{und} \quad B_1 = |\alpha_1|$$

zu berechnen. Dann ist

$$D_2 = \alpha_0^2 - |\alpha_1|^2 = A_1^4 - B_1^2; \quad D_1 = \alpha_0 = A_1^2$$

und daher

$$|\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_k| \leqq A_1 \left(1 - \frac{B_1^2}{A_1^4}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Zum Beweise setze ich $s = n + m - 1$ für den Grad n des Polynoms $f(x)$ und ein festes $m > 0$ und ordne einem beliebigen komplexen Polynom

$$F(x) = b_0 x^s + b_1 x^{s-1} + b_2 x^{s-2} + \cdots + b_s,$$

dessen Grad s nicht überschreitet, den $(s+1)$-stelligen Vektor

$$\mathfrak{b} = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_s)$$

zu. Werden $\lambda \mathfrak{b}$ mit komplexem λ und $\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2$ in der üblichen Weise erklärt, so ist offenbar dem Polynom $\lambda F(x)$ der Vektor $\lambda \mathfrak{b}$, der Summe $F_1(x) + F_2(x)$ zweier Polynome der Vektor $\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2$ zugeordnet, falls den Summanden $F_1(x)$, $F_2(x)$ die Vektoren $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$ entsprechen. Ferner erklären wir das innere Produkt zweier komplexer Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ durch

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = a_0 \bar{b}_0 + a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2 + \cdots + a_s \bar{b}_s = \overline{(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})};$$

offensichtlich gelten die Regeln

$$(\lambda \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \lambda (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}); \quad (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_1) + (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_2).$$

Insbesondere ist $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b})$ das Quadrat der Länge $|\mathfrak{b}|$ des Vektors $\mathfrak{b}$, also

$$|\mathfrak{b}| = (|b_0|^2 + |b_1|^2 + \cdots + |b_s|^2)^{\frac{1}{2}}$$

die Norm des Polynoms $F(x)$.

Den m Polynomen

$$x^{m-1} f(x), \; x^{m-2} f(x), \; \ldots, \; x f(x), \; f(x)$$

entsprechen in der soeben festgesetzten Zuordnung die $(n+m)$-stelligen

Vektoren

$$(5)\quad \begin{cases} \mathfrak{a}_0 = (1, a_1, a_2, \ldots, a_n, \quad 0, \quad 0, \quad \ldots, 0), \\ \mathfrak{a}_1 = (0, 1, a_1, \ldots, a_{n-1}, \quad a_n, \quad 0, \quad \ldots, 0), \\ \mathfrak{a}_2 = (0, 0, 1, \ldots, a_{n-2}, \quad a_{n-1}, \quad a_n, \quad \ldots, 0), \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathfrak{a}_{m-1} = (0, 0, 0, \ldots, a_{n-m+1}, a_{n-m+2}, a_{n-m+3}, \ldots, a_n). \end{cases}$$

Ist daher

$$g(x) = x^{m-1} + \omega_1 x^{m-2} + \omega_2 x^{m-3} + \cdots + \omega_{m-1}$$

ein vorerst willkürliches komplexes Polynom des Grades $m-1$, so entspricht dem Polynom

$$f(x)\, g(x) = x^{m-1} f(x) + \omega_1 x^{m-2} f(x) + \omega_2 x^{m-3} f(x) + \cdots + \omega_{m-1} f(x)$$

der Vektor

$$(6)\qquad \mathfrak{b} = \mathfrak{a}_0 + \omega_1 \mathfrak{a}_1 + \omega_2 \mathfrak{a}_2 + \cdots + \omega_{m-1} \mathfrak{a}_{m-1}.$$

Bei beliebigem $k = 1, 2, 3, \ldots$ gilt nun nach dem zu Anfang angegebenen Satze für je k Wurzeln $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ der Gleichung $f(x)\, g(x) = 0$ die Ungleichung

$$|\eta_1 \eta_2 \ldots \eta_k| \leqq |\mathfrak{b}|,$$

da $|\mathfrak{b}|$ die Norm des Polynoms $f(x)\, g(x)$ ist, weshalb auch für die k absolut größten Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_k$ der Gleichung $f(x) = 0$ die Ungleichungen

$$(7)\qquad |\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_k| \leqq |\mathfrak{b}|$$

bestehen, wie auch die willkürlichen Koeffizienten $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{m-1}$ des Polynoms $g(x)$ gewählt sein mögen.

Da die Vektoren $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{m-1}$ linear unabhängig sind, ist die Menge der Vektoren $\mathfrak{b}$ ein $(m-1)$-dimensionaler Teilraum; da die Längen dieser Vektoren sämtlich positiv sind, besitzt aus Stetigkeitsgründen die Menge der Werte $|\mathfrak{b}|$ ein positives Minimum, den Abstand des Teilraumes vom Nullpunkt.

Zur Bestimmung dieses Minimums setze man unter Trennung von Real- und Imaginärteil

$$\omega_0 = 1; \quad \omega_\mu = x_\mu + i\, y_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Dann lauten die Bedingungen für das Minimum der Funktion

$$(8)\quad \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}) = (\mathfrak{b}, \mathfrak{b}) = \sum_{\mu,\nu} (\mathfrak{a}_\mu, \mathfrak{a}_\nu)\, \omega_\mu\, \overline{\omega}_\nu \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$$

bekanntlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\varkappa} &= \sum_\nu (\mathfrak{a}_\varkappa, \mathfrak{a}_\nu)\, \overline{\omega}_\nu + \sum_\mu (\mathfrak{a}_\mu, \mathfrak{a}_\varkappa)\, \omega_\mu = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y_\varkappa} &= i \sum_\nu (\mathfrak{a}_\varkappa, \mathfrak{a}_\nu)\, \overline{\omega}_\nu - i \sum_\mu (\mathfrak{a}_\mu, \mathfrak{a}_\varkappa)\, \omega_\mu = 0, \end{aligned} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Sie können zu

$$(9) \qquad \sum_{\mu} (\mathfrak{a}_\mu, \mathfrak{a}_\varkappa)\, \omega_\mu = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, m-1;\ \mu = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$$

zusammengefaßt werden.

Nun ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{a}_1 \\ \mathfrak{a}_2 \\ \vdots \\ \mathfrak{a}_{m-1} \end{pmatrix}$$

in $m-1$ Zeilen und $s+1 = n+m$ Spalten vom Range $m-1$, weshalb die Hermitesche Matrix

$$K_m = \begin{pmatrix} (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1) & (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) & \ldots & (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_{m-1}) \\ (\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_1) & (\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_2) & \ldots & (\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_{m-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\mathfrak{a}_{m-1}, \mathfrak{a}_1) & (\mathfrak{a}_{m-1}, \mathfrak{a}_2) & \ldots & (\mathfrak{a}_{m-1}, \mathfrak{a}_{m-1}) \end{pmatrix}$$

des Grades $m-1$ positiv definit ist, insbesondere also eine positive Determinante $|K_m|$ besitzt. Mithin sind die Größen ω_μ durch die Gleichungen (9) eindeutig bestimmt. Ebenso ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{a}_0 \\ \mathfrak{a}_1 \\ \mathfrak{a}_2 \\ \vdots \\ \mathfrak{a}_{m-1} \end{pmatrix}$$

in m Zeilen und $s+1$ Spalten vom Range m, so daß auch die Hermitesche Matrix

$$H_m = \begin{pmatrix} (\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_0) & (\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1) & \ldots & (\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_{m-1}) \\ (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_0) & (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1) & \ldots & (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_{m-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\mathfrak{a}_{m-1}, \mathfrak{a}_0) & (\mathfrak{a}_{m-1}, \mathfrak{a}_1) & \ldots & (\mathfrak{a}_{m-1}, \mathfrak{a}_{m-1}) \end{pmatrix}$$

des Grades m positiv definit ist und eine positive Determinante $|H_m|$ besitzt. Für die aus (9) sich ergebenden Werte ω_μ findet man nun

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}) = \sum_{\mu=0}^{m-1} (\mathfrak{a}_\mu, \mathfrak{a}_0)\, \omega_\mu + \sum_{\varkappa=1}^{m-1} \sum_{\mu=0}^{m-1} (\mathfrak{a}_\mu, \mathfrak{a}_\varkappa)\, \omega_\mu \bar{\omega}_\varkappa = \sum_{\mu=0}^{m-1} (\mathfrak{a}_\mu, \mathfrak{a}_0)\, \omega_\mu,$$

so daß die Gleichungen

$$\sum_{\mu=0}^{m-1} (\mathfrak{a}_\mu, \mathfrak{a}_0)\, \omega_\mu = (\mathfrak{b}, \mathfrak{b}),$$

$$\sum_{\mu=0}^{m-1} (\mathfrak{a}_\mu, \mathfrak{a}_\varkappa)\, \omega_\mu = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, m-1)$$

bestehen. Bezeichnet man daher die Unterdeterminanten der Matrix H_m nach der ersten Spalte mit $|K_m|, L_1, L_2, \ldots, L_{m-1}$, so erkennt man sogleich, daß diese Gleichungen allein mit den Werten

$$\omega_\mu = \frac{L_\mu}{|K_m|}; \quad (\mathfrak{b}, \mathfrak{b}) = \frac{|H_m|}{|K_m|} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m-1)$$

verträglich sind. Mithin läßt sich der gesuchte Minimalabstand $|\mathfrak{b}|$ aus dem Determinantenquotienten

$$|\mathfrak{b}|^2 = \frac{|(\mathfrak{a}_\mu, \mathfrak{a}_\nu)|}{|(\mathfrak{a}_\varkappa, \mathfrak{a}_\lambda)|} \qquad \begin{pmatrix} \mu, \nu = 0, 1, \ldots, m-1 \\ \varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, m-1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

entnehmen.

Aus der speziellen Gestalt (5) der Vektoren $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{m-1}$ erhält man für $\mu \leqq \nu$

$$(\mathfrak{a}_\mu, \mathfrak{a}_\nu) = a_{\nu-\mu} + \bar{a}_1 a_{\nu-\mu+1} + \bar{a}_2 a_{\nu-\mu+2} + \cdots + \bar{a}_n a_{\nu-\mu+n} = \alpha_{\nu-\mu}$$
$$(\mathfrak{a}_\nu, \mathfrak{a}_\mu) = \bar{\alpha}_{\nu-\mu},$$

wenn $a_0 = 1$ und $a_r = 0$ für $r > n$ gesetzt wird, und folglich

$$|(\mathfrak{a}_\mu, \mathfrak{a}_\nu)| = D_m \qquad (\mu, \nu = 0, 1, \ldots, m-1),$$
$$|(\mathfrak{a}_\varkappa, \mathfrak{a}_\lambda)| = D_{m-1} \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, m-1),$$

woraus in Verbindung mit (7) die Ungleichung

$$|\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_k|^2 \leqq \frac{D_m}{D_{m-1}}$$

hervorgeht.

Damit ist der Beweis des Satzes 1 vollendet. Denn da für $m = 2, 3, 4, \ldots$ aus

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_0 + \omega_1 \mathfrak{a}_1 + \omega_2 \mathfrak{a}_2 + \cdots + \omega_{m-1} \mathfrak{a}_{m-1}$$

als Minimum von $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b})$ der Wert $\frac{D_m}{D_{m-1}}$, dagegen unter der Nebenbedingung $\omega_{m-1} = 0$ der Wert $\frac{D_{m-1}}{D_{m-2}}$ erhalten wird, gelten die Ungleichungen

$$D_{m-1}^2 \geqq D_m D_{m-2},$$

also auch

$$A_m^2 \geqq A_{m+1} A_{m-1} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots). \tag{11}$$

Da alle A_m positiv sind, erhält man hieraus noch leicht die Beziehungen

$$A_{m+1}^{\frac{1}{m+1}} \leqq A_m^{\frac{1}{m}}; \quad \frac{A_m}{A_{m-1}} \leqq A_m^{\frac{1}{m}} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots). \tag{12}$$

Auf Grund der Ungleichung

$$\frac{D_{m+1}}{D_m} \leqq \frac{D_m}{D_{m-1}} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

existiert der Grenzwert

$$\delta = \lim_{m \to \infty} \frac{D_m}{D_{m-1}}$$

mit positivem δ. Dann ist auch

$$\log \delta = \lim_{m \to \infty} (\log D_m - \log D_{m-1})$$

$$= \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{\mu=1}^{m} (\log D_\mu - \log D_{\mu-1}) = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \log D_m,$$

also

$$\lim_{m \to \infty} D_m^{\frac{1}{m}} = \lim_{m \to \infty} \frac{D_m}{D_{m-1}} = \delta$$

und

$$\lim_{m \to \infty} A_m^{\frac{1}{m}} = \lim_{m \to \infty} \frac{A_m}{A_{m-1}} = \alpha = \delta^{\frac{1}{2}}.$$

Der Grenzwert α ist offensichtlich die aus der angewendeten Methode fließende günstigste Schranke für eine Ungleichung der Gestalt

$$|\xi_1 \xi_2 \dots \xi_k| \leqq \alpha \qquad (\text{für } k = 1, 2, 3, \dots).$$

Die Untersuchung dieses Grenzwertes führt zu folgendem Ergebnis:

Satz 2. *Sind $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l$ die außerhalb des abgeschlossenen Einheitskreises der Zahlenebene liegenden Wurzeln einer algebraischen Gleichung*

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots a_n = 0,$$

so sei

$$\eta = |\xi_1 \xi_2 \dots \xi_l|;$$

besitzt $f(x) = 0$ keine derartigen Wurzeln, so sei

$$\eta = 1.$$

Dann ist

$$\eta = \alpha = \lim_{m \to \infty} \frac{A_m}{A_{m-1}} = \lim_{m \to \infty} A_m^{\frac{1}{m}}. \tag{13}$$

Dieser Satz zeigt, daß für Gleichungen $f(x) = 0$ mit Wurzeln außerhalb des abgeschlossenen Einheitskreises die Kette der im Satz 1 angegebenen Schranken in der Grenze die optimale, der Fragestellung angemessene Schranke liefern, während sie für Gleichungen, deren Wurzeln sämtlich im Innern oder auf dem Rande des Einheitskreises liegen, nicht mehr als die Bestätigung dieses Sachverhaltes liefern können und in der Grenze auch wirklich liefern.

Zum Beweise des Satzes 2 bilde man das Quadrat des absoluten Betrages des Polynoms $f(x)$ für eine beliebige Stelle $x = e^{i\varphi}$ des Einheitskreises:

$$|f(e^{i\varphi})|^2 = \sum_{\varkappa, \lambda=0}^{n} a_\varkappa \bar{a}_\lambda e^{i(\lambda-\varkappa)\varphi} = \sum_{\nu=-n}^{n} \sum_{\lambda=0}^{n} a_{\nu+\lambda} \bar{a}_\lambda e^{-i\nu\varphi} = \sum_{\nu=-n}^{n} \alpha_\nu e^{-i\nu\varphi}$$

in Übereinstimmung mit den früher eingeführten Bezeichnungen, wenn noch $\alpha_{-\nu} = \bar{\alpha}_\nu$ gesetzt wird.

Hat $f(x)$ keine Nullstelle auf dem Einheitskreise, so ist $|f(e^{i\varphi})|^2$ ein positives trigonometrisches Polynom der Veränderlichen φ und daher nach einem Satze von G. Szegö [3])

$$\delta = \lim_{m\to\infty} \frac{D_m}{D_{m-1}} = \lim_{m\to\infty} D_m^{\frac{1}{m}} = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(e^{i\varphi})|^2\, d\varphi\right).$$

Da das rechtsstehende Integral aber auch für Polynome $f(x)$ existiert, die Nullstellen auf dem Einheitskreise besitzen, gilt, wie man durch eine Grenzbetrachtung für geeignete, gegen $f(x)$ konvergierende Polynome leicht beweisen kann, diese Gleichung für jedes beliebige Polynom $f(x)$.

Wählt man insbesondere ein lineares Polynom $f(x) = x - \xi$, so ist, wenn noch $\xi = |\xi| e^{i\gamma}$ gesetzt wird,

$$|f(e^{i\varphi})|^2 = 1 - 2|\xi|\cos(\varphi - \gamma) + |\xi|^2$$

und somit

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(e^{i\varphi})|^2\, d\varphi = \begin{cases} 2\log|\xi|, & \text{wenn } |\xi| > 1, \\ 0, & \text{wenn } 0 \leqq |\xi| \leqq 1. \end{cases}$$

Daher erhält man für ein beliebiges Polynom $f(x)$, dessen erste l Nullstellen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_l$ außerhalb des Einheitskreises liegen,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(e^{i\varphi})|^2\, d\varphi = 2\log|\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_l|,$$

dagegen für ein Polynom $f(x)$, das keine derartige Nullstelle besitzt,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(e^{i\varphi})|^2\, d\varphi = 0.$$

Mithin ist

$$\delta = \lim_{m\to\infty} D_m^{\frac{1}{m}} = \begin{cases} |\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_l|^2, \\ 1 \end{cases}$$

bezüglich den im Satze 2 unterschiedenen beiden Fällen, in jedem Falle also

$$\alpha = \lim A_m^{\frac{1}{m}} = \eta.$$

Aus dem soeben herangezogenen Satze von G. Szegö ergeben sich die Abschätzungen des Satzes 1 auf fast trivialem Wege; da zu seinem Beweise indes recht kräftige Hilfsmittel herangezogen werden müssen, erscheint mir der hier eingeschlagene Weg nicht ohne Wert und Interesse und damit gerechtfertigt.

---

[3]) Vgl. G. Szegö, Ein Grenzwertsatz über die Toeplitzschen Determinanten einer reellen positiven Funktion, Math. Ann. **76** (1914), 490—503.

(Eingegangen am 8. Juni 1950.)

Mathematische Zeitschrift, Band 53, Heft 4, S. 364—374 (1950).

Zum Repräsentantenproblem der Logik für Aussagenfunktionen mit beliebig endlich oder unendlich vielen Wahrheitswerten.

Von

K. Wagner in Köln.

Im folgenden betrachten wir logische Aussagenfunktionen $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, deren Wertebereich B eine endliche oder unendliche Menge ist. Wir sprechen von einer *μ-wertigen Logik* $\mathfrak{L}_\mu$ (oder auch $\mathfrak{L}_B$), wenn der zugrunde gelegte Wertebereich B die Mächtigkeit μ hat.

Es sei ein Wertebereich B gegeben. Man kann dann die ungenaue Frage stellen, ob es gewisse „formalisierte" logische Operationen bezüglich B gibt, mit deren Hilfe allein sich sämtliche Aussagenfunktionen $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ von $\mathfrak{L}_B$ formelmäßig darstellen lassen? Diese Frage ist für den Spezialfall, daß B endlich, also $\mu = 2, 3, \ldots$ ist, oftmals behandelt und gelöst worden[1]).

In der vorliegenden Untersuchung wird eine Methode zur Lösung dieser Frage entwickelt, die sich allgemein auf jedes B und μ (also auch für unendliche μ) anwenden läßt.

Wenn auch die im hier vorliegenden Zusammenhange „letzte" Frage, was eine logische Aussage ist, wohl niemals restlos wird beantwortet werden können, so wollen wir dennoch, wenn auch nur mit ungenauen Worten, auf die folgenden Fragen hinweisen:

Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten besagt, jede logische Aussage ist genau entweder wahr oder falsch. Man kann der Meinung sein, daß dieser Satz an sich schon ein Wesensbestandteil des Denkens ist, oder einfacher gesagt, daß jede logische Aussage genau nur entweder als wahr oder als falsch bestehend d e n k b a r ist. Nennt man

[1]) Vgl. für $\mu = 2$: Hilbert-Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik, Berlin (1928), S. 15 ff. Für $\mu = 3, 4, \ldots$ vgl. E. L. Post, Introduktion to a general theorie of elementary propositions, Am. Journ. of Math., **43** (1921), S. 163—185. Lukasiewicz-Tarski, Untersuchungen über den Aussagenkalkül. C. R. Soc. Sci. Lett. Varsovie (1930), classe III, S. 30 ff. D. L. Webb, The algebra of n-valued logic, C. R. Soc. Sci. Lett. Varsovie (1936), classe III, S. 153—168; Definition of Post's generalized negative and maximum in terms of one binary operation, Am. Journ. of Math. **58** (1936), S. 193 ff; Generation of any n-valued logic by one binary operation, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **21** (1935), S. 252—254. H. R. Müller, Algebraischer Aussagenkalkül, SB. Akad. Wiss., Wien IIa, **149** (1940), S. 77—115.

aber jede Aussage wahr bzw. falsch, nur wenn sie als wahr bzw. als falsch entscheidbar ist, so kann man leicht Beispiele von nicht entscheidbaren Aussagen finden, die also weder wahr noch falsch sind[2]). Also auf den Unterschied zwischen „denkbar" bzw. „entscheidbar" kommt es ganz besonders an, ob man die zweiwertige bzw. eine (mindestens) dreiwertige Logik zugrunde legen will.

Es kann aber auch sein, daß B unendlich ist. Deutet man z. B. in der Wahrscheinlichkeitstheorie jede Wahrscheinlichkeit eines Merkmals bezüglich einer vorgegebenen Ereignisfolge als den Wahrheitswert des betreffenden Merkmals, so ist unser B offenbar gleich der Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1. —

Wir legen nunmehr sogleich allgemein für jedes μ fest:

Def. 1. *Man habe zwei Mengen* $\mathfrak{M}$ *und* B.
Es sei μ *die Mächtigkeit von* B.
Ferner habe man eine eindeutige Abbildung von $\mathfrak{M}$ *auf* B[3]).
Dann nennen wir $\mathfrak{M}$ *(mit der vorliegenden Abbildung von* $\mathfrak{M}$ *auf* B*) einen* μ*-wertigen Aussagenbereich. Insbesondere nennen wir dann jedes Element von* $\mathfrak{M}$ *eine (*μ*-wertige) Aussage. Ist ferner* x *ein Element von* $\mathfrak{M}$ *und ist mittels der vorliegenden Abbildung dieses* x *auf das Element* β *von* B *abgebildet, so sagen wir hierfür auch:* x *hat den Wahrheitswert* β. *Wir nennen* B *den Wertebereich von* $\mathfrak{M}$.

Man habe zwei Aussagen x, x' aus demselben Aussagenbereich. Wir nennen x zu x' *äquivalent*, in Zeichen

$$x \sim x',$$

wenn x und x' denselben Wahrheitswert haben.

Offenbar folgt dann:

1. Es gilt $x \sim x$ für jede Aussage x.
2. Ist $x \sim x'$, so ist auch $x' \sim x$.
3. Ist $x \sim x'$ und $x' \sim x''$, so ist auch $x \sim x''$.

Hieraus folgt, jeder μ-wertige Aussagenbereich $\mathfrak{M}$ zerfällt in je genau μ[4]) wohlbestimmte, elementfremde Klassen von je untereinander äquivalenten Aussagen, und zwar besteht, genauer gesagt, für jedes Element β von B je eine Klasse von $\mathfrak{M}$ aus genau allen denjenigen Elementen von $\mathfrak{M}$, die diesen Wahrheitswert β haben.

---

[2]) Man stelle sich etwa ein verschlossenes Kästchen mit einer Münze darin vor. Man schüttele nun das Kästchen mit der Münze darin gut durch, mache eine Pause, und schüttele nochmals gut durch und öffne hiernach erst das Kästchen. Dann ist die Aussage, in der Pause hat in dem Kästchen das Wappen der Münze nach oben gelegen, offenbar eine nicht entscheidbare Aussage.

[3]) D. h. also: Jedes Element von $\mathfrak{M}$ ist auf je genau ein bestimmtes Element von B abgebildet und jedes Element von B kommt bei dieser Abbildung wenigstens einmal als Bildelement eines Elementes von $\mathfrak{M}$ dran.

[4]) Das μ hier und entsprechend im folgenden in ähnlichen Fällen soll natürlich, genauer gesagt, heißen: „von der Mächtigkeit μ".

Wir nennen jede dieser μ Klassen von $\mathfrak{M}$ eine Wahrheitsklasse (von $\mathfrak{M}$).

Wir kommen nunmehr zu dem hier entscheidenden Begriff der logischen Aussagenfunktion, kurz im folgenden genannt: logische Funktion.

Def. 2. *Man habe zwei Aussagenbereiche* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ [5]).

Es sei n *eine feste ganze Zahl* $\geqq 1$.

Es sei einer jeden Folge von je n *(nicht notwendig verschiedenen) Aussagen* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *aus* $\mathfrak{M}$ *je genau eine bestimmte Aussage* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *aus* $\mathfrak{M}'$ *zugeordnet.*

Wir nennen diese Zuordnung dann eine (n*-stellige oder auch* n*-dimensionale) logische Funktion (über* $\mathfrak{M}$ *oder auch genauer über* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$*), wenn für je* n *Paare äquivalenter Aussagen* $x_1' \sim x_1''$, $x_2' \sim x_2''$, $\ldots$, $x_n' \sim x_n''$ *von* $\mathfrak{M}$ *gilt:*

$$\varphi(x_1', \ldots, x_n') \sim \varphi(x_1'', \ldots, x_n''),$$

d. h. also mit anderen Worten, wenn es zu jeder Folge von je n *(nicht notwendig verschiedenen) Wahrheitsklassen* $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_n$ *von* $\mathfrak{M}$ *je genau eine bestimmte Wahrheitsklasse* $\mathfrak{K}'$ *von* $\mathfrak{M}'$ *gibt, so daß* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *stets in* $\mathfrak{K}'$ *fällt, wie man auch immer hierbei das* x_1 *aus* $\mathfrak{K}_1$, *das* x_2 *aus* $\mathfrak{K}_2, \ldots$, *das* x_n *aus* $\mathfrak{K}_n$ *wählen mag* [6]).

Genauer nennen wir jede logische Funktion $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ über $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, wenn $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ beide μ-wertig sind [7]), eine μ-wertige logische Funktion.

Man habe zwei μ-wertige Aussagenbereiche $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$. Es ist dann das Ziel der folgenden Betrachtungen, eine gewisse Rekursionsformel für sämtliche μ-wertigen logischen Funktionen $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ über $\mathfrak{M}$ aufzustellen und zu beweisen. Und zwar wird sich, genauer gesagt, hieraus ergeben, daß sich jedes $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ über $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ darstellen läßt je als ein gewisses „verallgemeinertes Polynom“ in den Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ und gewissen „verallgemeinerten Negationen“ $x_1^{(\beta)}, \ldots, x_n^{(\beta)} (\beta \in B)$ von diesen $x_1, \ldots, x_n$.

---

[5]) Wir setzen im folgenden voraus, daß $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ denselben Wertebereich B haben. Diese Einschränkung ist aber in dieser Def. 2 selbst völlig überflüssig.

[6]) Hat man zwei logische Funktionen $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ und $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ über $\mathfrak{M}$, so setzen wir $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \psi(x_1, \ldots, x_n)$, wenn die beiden Funktionen „wertgleich“ sind, d. h. schärfer gesagt, wenn für je n Aussagen $x_1, \ldots, x_n$ aus $\mathfrak{M}$ gilt $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \sim \psi(x_1, \ldots, x_n)$. Man prüft leicht nach, daß diese Gleichheitsrelation die drei Gleichheitspostulate (Reflexivität, Symmetrie und Transitivität) erfüllt. — Wir weisen darauf hin, daß man in der Logik ganz wesentlich (im Gegensatz zur Analysis) aber auch noch feinere Unterschiede macht. Wir nennen nämlich zwei logische Funktionen $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ und $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ identisch, wenn die beiden sie vermittelnden Abbildungen dieselben sind, d. h. also schärfer gesagt, wenn für je n Aussagen $x_1, \ldots, x_n$ aus $\mathfrak{M}$ gilt $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \psi(x_1, \ldots, x_n)$. Mit dieser zuletzt genannten feineren Unterscheidung der logischen Funktionen werden wir uns im folgenden aber nicht befassen.

[7]) Vgl. Fußn. 5.

Hat man einen zweiwertigen Aussagenbereich $\mathfrak{M}$, so kann man bekanntlich durch Bildung des logischen Gegenteiles einer jeden Aussage von $\mathfrak{M}$ oder auch durch Zusammensetzung je zweier Aussagen von $\mathfrak{M}$ mittels des logischen „und" usw. aus $\mathfrak{M}$ „neue" zweiwertige logische Aussagen bilden [8]).

Ähnlich gehen wir jetzt bei den μ-wertigen Aussagenbereichen vor. Hierzu denken wir uns in unserem B zwei feste Elemente α, γ gegeben [9]).

Ist $\mu \geqq 3$, so hat es zunächst natürlich keinen Sinn mehr, von der Negation einer μ-wertigen Aussage x zu sprechen. Man kann jedoch dann die folgenden μ logischen μ-wertigen Funktionen $x^{(\delta)}, (\delta \in B)$ einer Veränderlichen x als Verallgemeinerung der Negation $\bar{x}$ im Falle $\mu = 2$ einführen. Es sei nämlich zunächst die Funktion $x^{(\alpha)} = x$ die Identität. Ferner sei für jedes Element $\delta \neq \alpha$ aus B die Funktion $x^{(\delta)}$ folgendermaßen festgelegt: Hat man eine Aussage x mit dem Wahrheitswert δ, so habe das $x^{(\delta)}$ (mit diesem x) den Wahrheitswert α; hat man dagegen eine Aussage x mit einem Wahrheitswert $\beta \neq \delta$, so habe das $x^{(\delta)}$ (mit diesem x) den Wahrheitswert δ. Anschaulich gesprochen, ist also unser $x^{(\delta)}$, $\delta \neq \alpha$, über sämtlichen von $\mathfrak{R}_\delta$ verschiedenen Klassen gleich δ, über $\mathfrak{R}_\delta$ selbst dagegen gleich α, wobei $\mathfrak{R}_\delta$ die Klasse der Aussagen mit dem betreffenden Wahrheitswert δ bezeichne. Das folgende Schema möge unsere $x^{(\delta)}$, $\delta \in B$, nochmals zusammenfassend grob anschaulich erläutern.

B	$x^{(\alpha)}$	$x^{(\beta)}$	...	$x^{(\delta)}$	...	$x^{(\gamma)}$
α	α	β	...	δ	...	γ
β	β	α	...	δ	...	γ
.	.	β		.		.
.	.	.		δ		.
δ	δ	β	...	α	...	γ
.	.	.		δ		.
.	.	.		.		γ
γ	γ	β	...	δ	...	α

Wir vereinbaren, die am linken Rande des Schemas angedeutete Aufführung der Wahrheitswerte bei allen schematischen Erläuterungen

[8]) Diese logischen Verknüpfungen von Aussagen stellen also ein wichtiges Hilfsmittel zur Bildung „neuer" logischer Aussagen dar. Dies ist aber keineswegs das einzige „Erzeugungsprinzip" von logischen Aussagen. Z. B. kann man auch durch Benutzung mittelbar zusammengesetzter logischer Funktionen $\varphi(\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y))$ usw. weitere logische Aussagen zusammensetzen. Wir gehen aber hierauf im folgenden nicht ein.

[9]) Beispielsweise, wenn B das abgeschlossene Zahlenintervall $0 \leqq \beta \leqq 1$ ist, sei $\alpha = 1$ und $\gamma = 0$, oder wenn $B = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\}$ ist, sei z. B. $\alpha = \beta_1$ und $\gamma = \beta_k$.

im folgenden beizubehalten. Dann können wir uns das $x^{(\alpha)}$ auch einfacher durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma \end{pmatrix}$$

gegeben denken oder $x^{(\gamma)}$ durch die Matrix[10])

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma \\ \alpha \end{pmatrix}$$

In dem — abgesehen von der Trivialität $\mu = 1$ — allereinfachsten Falle zweiwertiger Logik $\alpha = 1$, $\gamma = 0$ ist dann also speziell

$$x^{(1)} : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x^{(0)} : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

für die dreiwertige Logik $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 0$ ergibt sich dagegen

$$x^{(1)} : \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x^{(\frac{1}{2})} : \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad x^{(0)} : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ist speziell $\mu = 2$, so ist $x^{(\gamma)}$, wenn wir noch $\alpha = w$ (wahr), $\gamma = f$ (falsch) setzen, durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} f \\ w \end{pmatrix}$$

gegeben. Wir sehen hieraus, daß $x^{(\gamma)}$ im Spezialfalle $\mu = 2$ tatsächlich nichts anderes als die Negation $\bar{x}$ von x ist. Wir nennen unsere $x^{(\beta)}$, $(\beta \in B)$, die verallgemeinerten logischen Negationen von x (also für jedes μ und B)[11]).

---

[10]) Diese Matrizen bestehen natürlich aus je genau μ Zeilen, also falls μ unendlich ist, aus unendlich vielen Zeilen.

[11]) Aus Symmetriegründen deuten wir also auch $x^{(\alpha)} = x$ selbst als eine verallgemeinerte (uneigentliche) logische Negation, obwohl dies bei $\mu = 2$ nicht üblich ist. Ist speziell unser μ endlich, so würde man im folgenden in diesem speziellen Falle, wie man leicht sieht, auch mit den Negationen von Post auskommen, vgl. Post, Introduktion to a general theory of elementary propositions, Am. Journ. of Math. **43** (1921), S. 180 ff. Hierzu bemerken wir, daß die Post'schen Negationen mittels zyklischer Vertauschungen der Wahrheitswerte aber auch nur für endliche μ definiert sind.

Wir verallgemeinern nun noch das logische „ausschließende oder" und das logische „und" von dem bekannten Spezialfalle $\mu = 2$ auf beliebig μ-wertige Aussagenbereiche.

Es bezeichne x, y zwei Veränderliche in einem festen μ-wertigen Aussagenbereich $\mathfrak{M}$. Es sei B der Wertebereich von $\mathfrak{M}$. Dann verstehen wir unter $x + y$ die durch die folgende quadratische Matrix gegebene μ-wertige, zweidimensionale logische Funktion:

$$x + y: \quad \begin{pmatrix} \gamma & \gamma & \dots & \gamma & \dots & \alpha \\ \gamma & \gamma & \dots & \gamma & \dots & \beta \\ . & . & & & \dots & . \\ \gamma & \gamma & \dots & \gamma & \dots & \delta \\ . & . & \dots & . & \dots & . \\ \alpha & \beta & \dots & \delta & \dots & \gamma \end{pmatrix}$$

Mit ausführlichen Worten bedeutet unser $x + y$ also folgendes[12]): Hat x den Wahrheitswert γ, so soll die zusammengesetzte Aussage $x + y$ jeweils denjenigen Wahrheitswert haben, den das y hat; hat dagegen y den Wahrheitswert γ, so soll $x + y$ denjenigen Wahrheitswert haben, den x hat; hat aber weder x noch y den Wahrheitswert γ, so soll $x + y$ den Wahrheitswert γ haben[13]).

Schauen wir uns nun diese Funktion $x + y$ etwas näher an. Zunächst folgt im speziellen Falle $\mu = 2$ sofort:

$$x + y: \quad \begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ \alpha & \gamma \end{pmatrix}$$

oder auch, wenn wir $\alpha = w$ und $\gamma = f$ setzen:

$$x + y: \quad \begin{pmatrix} f & w \\ w & f \end{pmatrix}.$$

Wir sehen hieraus, daß hier im Falle $\mu = 2$ das Zeichen $+$ die Bedeutung des „ausschließenden oder" hat.

---

[12]) Man denke sich wiederum, wie vereinbart, die μ möglichen Wahrheitswerte $\alpha, \dots, \gamma$ von x am linken Rande dieser Matrix „untereinander" angeschrieben (also α an die erste Zeile, γ an die letzte Zeile) und ferner die μ möglichen Wahrheitswerte $\alpha, \dots, \gamma$ von y am oberen Rande der Matrix von links nach rechts (also α an die erste Spalte, γ an die letzte). Es sei x, y gegeben. Hat dann x den Wahrheitswert β_1 und y den Wahrheitswert β_2, so bringe man in der Matrix die β_1-Zeile mit der β_2-Spalte zum Schnitt. Das in diesem Schnittpunkte befindliche Element von B ist dann der Wahrheitswert von $x + y$ für das vorgegebene x, y.

[13]) Man sieht leicht ein, daß dieses soeben eingeführte $x + y$ alle Bedingungen von Def. 2 erfüllt, da wir jedem Aussagenpaar x, y aus $\mathfrak{M}$ je das Zeichen $x + y$ (also jeweils mit diesem x, y) zuordnen und wir diese Zeichen $x + y$ natürlich als „neue" μ-wertige Aussagen deuten können. Aber $x + y$ braucht nicht in $\mathfrak{M}$ zu liegen.

Hieraus folgt, daß diese Operation + im Spezialfalle $\mu = 2$ das assoziative und das kommutative Gesetz erfüllt. Denn das „ausschließende oder" erfüllt ja diese Gesetze.

Dies bleibt allgemein für jedes μ, wie man leicht bestätigen kann, allerdings nur bestehen für das kommutative Gesetz, dagegen nicht mehr für das assoziative Gesetz. Es gilt also

$$x + y = y + x$$

in jedem beliebig μ-wertigen Aussagenbereich. Denn die $x + y$ bestimmende Matrix ist ja symmetrisch zu ihrer Hauptdiagonalen.

Allerdings gilt das assoziative Gesetz allgemein für jedes μ auch noch (mindestens) in dem folgenden beschränkten Umfange, und zwar für alle (endlichen oder unendlichen) Summen, in denen sämtliche Summanden, bis auf höchstens jeweils einen, den Wahrheitswert γ haben. In jeder solchen Summe darf man also nach Belieben Klammern machen, ohne den Wahrheitswert der Summe zu ändern. Denn hat in einer zweigliedrigen Summe ein Summand den Wahrheitswert γ, so reproduziert sich ja in der Summe immer der Wahrheitswert des anderen Summanden.

Ähnlich wie für das „ausschließende oder" gehen wir jetzt für das logische „und" vor.

Wir verstehen unter $x \cdot y$ die durch die folgende quadratische Matrix gegebene μ-wertige, zweidimensionale Funktion:

$$x \cdot y: \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \dots & \gamma \\ \gamma & \gamma & \dots & \gamma \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \gamma & \gamma & \dots & \gamma \end{pmatrix}$$

Unser $x \cdot y$ bedeutet also[14]): Hat x den Wahrheitswert α, so soll die zusammengesetzte Aussage $x \cdot y$ jeweils denjenigen Wahrheitswert haben, den das y hat; für jeden von α verschiedenen Wahrheitswert des x soll dagegen $x \cdot y$ immer den Wahrheitswert γ haben[15]).

Ist $\mu = 2$ und setzen wir hierfür $\alpha = w$ und $\gamma = f$, so ergibt sich sofort:

$$x \cdot y: \quad \begin{pmatrix} w & f \\ f & f \end{pmatrix}.$$

Wir sehen hieraus, daß im speziellen Falle $\mu = 2$ diese Operation $\cdot$ die Bedeutung des logischen „und" hat.

Hieraus folgt, daß unser $\cdot$ für $\mu = 2$ das assoziative und das kommutative Gesetz erfüllt, und daß für $\mu = 2$ unser + mit dem $\cdot$ durch das

[14]) Vgl. Fußn. 12.

[15]) Für die Multiplikation gilt Entsprechendes wie in Fußn. 13 für die Addition.

links- und rechtsseitige distributive Gesetz verknüpft ist. Denn dies folgt ja aus den bekannten Sätzen der zweiwertigen Aussagenlogik.

Man kann hier leicht für jedes μ die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes für die Multiplikation bestätigen

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z .$$

Denn hat zunächst x den Wahrheitswert α, so hat jede der beiden Seiten der Gleichung den Wahrheitswert von $y \cdot z$; für jeden von α verschiedenen Wahrheitswert des x hat auch jede der beiden Seiten der Gleichung den gleichen Wahrheitswert γ.

Dagegen gilt für $\mu \geqq 3$ nicht mehr das kommutative Gesetz der Multiplikation, wie einfache Beispiele zeigen. Man muß also in den höherwertigen Aussagenbereichen die Reihenfolge der Faktoren wohl beachten.

Schließlich zeigen wir, daß für jedes μ das linksseitige distributive Gesetz gilt[16]):

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z .$$

Denn zunächst habe x den Wahrheitswert α. Dann hat die linke Seite der Gleichung den Wahrheitswert von $y + z$; dann hat andererseits $x \cdot y$ den Wahrheitswert von y und ebenso hat dann $x \cdot z$ den Wahrheitswert von z; d. h. also, die rechte Seite der Gleichung hat ebenfalls den Wahrheitswert von $y + z$. Andererseits sei der Wahrheitswert des x von α verschieden. Dann hat auch jede Seite der Gleichung offenbar den gleichen Wahrheitswert γ.

Zusammenfassend für die höherwertigen Aussagenbereiche stellen wir jetzt nochmals zusammen:

Die Addition ist kommutativ, aber nicht assoziativ; allerdings ist sie noch assoziativ für jede Summe, in der sämtliche Summanden bis auf höchstens einen den Wahrheitswert γ haben.

Umgekehrt ist die Multiplikation assoziativ, aber nicht kommutativ.

Anschaulich gesprochen, gabelt sich also die Gültigkeit des assoziativen und des kommutativen Gesetzes beim Aufsteigen von der zweiwertigen Aussagenlogik in die höherwertigen Aussagenbereiche.

Schließlich gilt das linksseitige distributive Gesetz.

Es gilt dann der

Satz: *Es sei $\mathfrak{M}$ ein μ-wertiger Aussagenbereich mit dem Wertebereich B. Man habe eine n-dimensionale logische Funktion*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n),\ n \geqq 2,$$

über $\mathfrak{M}$.

Dann gibt es zu dieser Funktion φ zu jedem Element β von B je genau eine bestimmte $(n-1)$-dimensionale logische Funktion

[16]) Das rechtsseitige distributive Gesetz ist aber für $\mu \geqq 3$ nicht mehr erfüllt.

$\varphi_\beta(x_1, \ldots, x_{n-1})$ *über* $\mathfrak{M}$, *so daß gilt:*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\beta \in B} (x_n^{(\beta)} \cdot \varphi_\beta(x_1, \ldots, x_{n-1})),$$

und zwar erfüllen keine von diesen φ_β *verschiedenen logischen Funktionen auch noch diese Gleichung.*

Ist zu jedem β *aus* B *je eine* $(n-1)$ *— dimensionale Funktion* $\psi_\beta(x_1, \ldots, x_{n-1})$ *über* $\mathfrak{M}$ *gegeben, so stellt auch umgekehrt die Summe* $\sum_{\beta \in B} (x_n^{(\beta)} \cdot \psi_\beta(x_1, \ldots, x_{n-1}))$ *immer wirklich eine (wohldefinierte) n-dimensionale logische Funktion über* $\mathfrak{M}$ *dar.*

Hat man speziell eine eindimensionale logische Funktion $\varphi(x)$ *über* $\mathfrak{M}$, *so gibt es zu diesem* $\varphi(x)$ *zu jedem Element* β *von* B *je genau ein bestimmtes Element* ν_β *von* B, *so daß gilt:*

$$\varphi(x) = \sum_{\beta \in B} (x^{(\beta)} \cdot x^{(\nu_\beta)}),$$

und zwar erfüllen keine von diesen $x^{(\nu_\beta)}$ *verschiedenen Funktionen auch noch diese Gleichung.*

Ist zu jedem β *von* B *je ein Element* λ_β *von* B *gegeben, so stellt auch umgekehrt die Summe* $\sum_{\beta \in B} (x^{(\beta)} \cdot x^{(\lambda_\beta)})$ *wirklich immer ein* $\varphi(x)$ *dar*[17]).

Denn zunächst bemerken wir, daß in jeder der hier betrachteten Summen jeweils sämtliche Summanden bis auf jeweils höchstens einen den Wahrheitswert γ haben, da ja unter sämtlichen $x^{(\beta)}$ $(\beta \in B)$ jeweils genau nur eins den Wahrheitswert α hat. Also fallen unsere sämtlichen Summen in denjenigen Teilbereich aller Summen, in dem wir die Glieder jeder Summe nach Belieben mittels Klammern zusammenfassen dürfen, ohne jeweils den Wahrheitswert der Summe zu ändern. Die von uns betrachteten Summen sind also tatsächlich immer sinnvoll.

Nun denken wir uns zwei Summen

$$\sum_{\beta \in B} (x_n^{(\beta)} \cdot \varphi_\beta(x_1, \ldots, x_{n-1})) \quad \text{und} \quad \sum_{\beta \in B} (x_n^{(\beta)} \cdot \psi_\beta(x_1, \ldots, x_{n-1}))$$

gegeben und es sei für wenigstens ein $\delta \in B$ die Funktion $\varphi_\delta \neq \psi_\delta$. Dies besagt also, daß es $n-1$ Aussagen $x_1, \ldots, x_{n-1}$ gibt, so daß hierfür die beiden Wahrheitswerte von $\varphi_\delta(x_1, \ldots, x_{n-1})$ und $\psi_\delta(x_1, \ldots, x_{n-1})$ verschieden ausfallen. Wählt man dazu noch irgend eine Aussage x_n von $\mathfrak{M}$ mit dem Wahrheitswert δ, so sind für unsere n Aussagen $x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$,

---

[17]) Wir haben früher angedeutet (vgl. Fußn. 13), daß wir mittels der verallgemeinerten Negationen, Addition und Multiplikation aus jedem festen Aussagenbereich $\mathfrak{M}$ „neue" logische Aussagen erzeugen können. Es bezeichne nun $\mathfrak{M}^*$ die Menge aller Aussagen, die sich mittels dieser drei soeben genannten Prozesse aus den Elementen von $\mathfrak{M}$ erzeugen lassen. Unser φ liegt in $\mathfrak{M}'$ (vgl. Def. 2). Dennoch brauchen die Summen oben nicht in $\mathfrak{M}'$ zu liegen. Sie liegen aber dann (mindestens) in $(\mathfrak{M} + \mathfrak{M}')^*$.

wie man leicht sieht, auch die beiden Wahrheitswerte der beiden betrachteten Summen verschieden. Also stellen die beiden Summen zwei verschiedene Funktionen dar.

Schließlich denken wir uns eine Funktion $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqq 2$, über $\mathfrak{M}$ gegeben. Wir setzen dann für jedes $\beta \in B$ fest: $\varphi_\beta(x_1, \ldots, x_{n-1})$ trage für je $n-1$ Aussagen $x_1, \ldots, x_{n-1}$ aus $\mathfrak{M}$ je denjenigen Wahrheitswert, den das $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ mit diesen $x_1, \ldots, x_{n-1}$ und irgend einem x_n aus der Wahrheitsklasse $\mathfrak{K}_\beta$ des betrachteten β trägt. Wir bilden $\sum_{\beta \in B} (x_n^{(\beta)} \cdot \varphi_\beta(x_1, \ldots, x_{n-1}))$ mit den vorigen φ_β. Sind dann $x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ irgendwelche n Aussagen aus $\mathfrak{M}$ und ist δ der Wahrheitswert von x_n, so stimmt der Wahrheitswert der letzten Summe, wie man leicht sieht, mit dem Wahrheitswert von $\varphi_\delta(x_1, \ldots, x_{n-1})$ für unsere $x_1, \ldots, x_{n-1}$, folglich auch mit dem Wahrheitswert des vorgegebenen $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ für unsere $x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ überein. Also sind in der Tat das $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ und die angegebene Summe zwei gleiche Funktionen.

Der Beweis des Spezialfalles $n = 1$ verläuft völlig analog zu dem soeben bewiesenen Teil $n \geqq 2$ des Satzes. —

Unsere Formel reduziert über jedem μ-wertigen Aussagenbereich $\mathfrak{M}$ sämtliche n-dimensionalen Funktionen auf die $(n-1)$-dimensionalen Funktionen über $\mathfrak{M}$ für jedes $n = 2, 3, \ldots$.

Führt man dies für die φ_β rekursiv durch und benutzt man hierbei außerdem auch noch die Allgemeingültigkeit des linksseitigen distributiven Gesetzes (das ja, da die $x^{(\beta)}$ dauernd in den Summanden links auftreten, hier auch dauernd anwendbar ist), so ergibt sich hieraus leicht für jedes beliebige μ die Folgerung:

Jede μ-wertige logische Funktion $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ist darstellbar als ein homogenes „Polynom" in den $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und den verallgemeinerten Negationen $x_1^{(\beta)}, x_2^{(\beta)}, \ldots, x_n^{(\beta)}$ $(\beta \in B)$ und zwar als ein „Polynom" vom Grade $n+1$ mit μ^n Gliedern[18]).

[18]) Dieses ist speziell für jedes endliche μ bekannt, vgl. Fußn. 1. Man kann diese Folgerung aber auch speziell noch für endliches μ auf die Zahlentheorie anwenden. Es sei z. B. $\mathfrak{M}$ die Menge der ganzen Zahlen, ferner sei B die Menge der m Restklassen mod. m, also $B = \{\mathfrak{K}(1), \mathfrak{K}(2), \ldots, \mathfrak{K}(m)\}$. Man ordne jeder Folge von n ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je die folgende Restklasse $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \mathfrak{K}(\prod_{\nu=1}^{n} x_\nu)$ zu, also diejenige Restklasse mod m, in die das Zahlenprodukt $\prod_{\nu=1}^{n} x_\nu$ hineinfällt. Dann folgt als einfacher Spezialfall unserer Formel, daß sich $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ganz rational darstellen läßt mittels der einstelligen Abbildungen $x_1^{(\beta)}, \ldots, x_n^{(\beta)}$ $(\beta = 1, 2, \ldots, m)$ und der durch unser „logisches" $+$ und bestimmten zweistelligen Abbildungen, also allein mittels dieser speziellen (ein- und zweistelligen) zahlentheoretischen Funktionen.— Ist andererseits B z. B. die Menge der reellen Zahlen, so folgt weiterhin aus der obigen Folgerung unmittelbar als Spezialfall, daß sich jede reelle n-dimensionale Funktion darstellen läßt als ein homogenes „Polynom" in dem von uns verallgemeinerten Sinne.—

Denn zunächst folgt dies für $n = 1$ und jedes μ unmittelbar aus unserer speziellen Formel. Überdies sieht man leicht, daß in dieser Formel bei jeder Ersetzung des x durch eine Aussage aus $\mathfrak{M}$ sämtliche Summanden bis auf höchstens jeweils einen den Wahrheitswert γ haben.

Nun nehmen wir an, die Behauptung sei für $n - 1$ und jedes μ bewiesen. Außerdem nehmen wir an, daß in jedem $(n-1)$-dimensionalen $\psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ bei jeder Ersetzung der $x_1, \ldots, x_{n-1}$ durch Aussagen aus $\mathfrak{M}$ sämtliche Summanden des ψ darstellenden homogenen „Polynoms" bis auf höchstens jeweils einen den Wahrheitswert γ haben.

Dann folgt aus unserer allgemeinen Formel weiter, da von den linken Faktoren $x_n^{(\beta)}$ $(\beta \in B)$ immer nur einer den Wahrheitswert α hat, daß auch die nach Multiplikation mit diesen sich ergebenden Einzelsummanden bis auf höchstens jeweils einen den Wahrheitswert γ haben. Es folgt also auch wiederum in dem homogenen „Polynom" für φ die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes der Addition.

Also gilt nach dem Satz vom vollständigen Induktionsschluß die Behauptung für jedes $n = 1, 2, \ldots$ und jedes μ.—

(Eingegangen am 13. April 1950.)

Mathematische Zeitschrift, Band 53, Heft 4, S. 375—386 (1950).

Bemerkungen zum Homomorphiebegriff.

Von

Günter Pickert in Tübingen.

Ein Homomorphiebegriff ist bisher außer für Multigruppen [1]) nur für diejenigen Strukturen [2]) eingeführt und untersucht worden, welche durch eindeutige Verknüpfungen gegeben sind. In der vorliegenden Arbeit gehe ich nun von einem Strukturbegriff aus, der weiter ist als der bei BIRKHOFF und enger als der bei BOURBAKI, indem er z. B. nicht die topologischen Strukturen umfaßt. Für diesen Strukturbegriff führe ich im 1. Abschnitt einen Homomorphiebegriff ein und gebe die Einordnung des üblichen Homomorphiebegriffes sowie die beim neuen auftretenden Abweichungen an. Im 2. Abschnitt werden die vom BIRKHOFFschen Strukturbegriff her bekannten Sätze über subdirekte Vereinigung von Strukturen für den neuen Strukturbegriff bewiesen. Der 3. Abschnitt schließlich befaßt sich mit solchen Strukturen, die durch ein dreistelliges Prädikat gegeben sind, und führt zu einem Satz über Homomorphismen von Rechtsmultigruppen auf Gruppen.

Zunächst erkläre ich einige Bezeichnungen. Ist φ eine Abbildung der Menge $\mathfrak{A}$, so bedeutet φa das Bild von $a \in \mathfrak{A}$ und $\varphi \mathfrak{B}$ die Menge der φa mit $a \in \mathfrak{B} \leq \mathfrak{A}$. Ist weiter ψ eine Abbildung von $\mathfrak{A}' \geqq \varphi \mathfrak{A}$, so bedeutet $\psi \cdot \varphi$ die Abbildung von $\mathfrak{A}$ mit $(\psi \cdot \varphi) a = \psi(\varphi a)$. Folgt $a = b$ aus $\varphi a = \varphi b$, so heißt φ *umkehrbar* und φ^{-1} bezeichnet die Umkehrabbildung. Die Abbildung ε mit $\varepsilon a = a$ für alle $a \in \mathfrak{A}$ wird die *identische Abbildung* von $\mathfrak{A}$ genannt. $\mathfrak{P}(\mathfrak{A})$ ist die Menge der Teilmengen von $\mathfrak{A}$. Das Zeichen 0 bedeutet stets die leere Menge. $\mathfrak{A}^{\mathfrak{I}}$ ist die Menge der Abbildungen $\mathfrak{I} > 0$ in $\mathfrak{A}$. Für $\mathfrak{A}_i \leq \mathfrak{A}$ $(i \in \mathfrak{I})$ ist $\underset{i \in \mathfrak{I}}{\times} \mathfrak{A}_i$ die Menge der $\varphi \in \mathfrak{A}^{\mathfrak{I}}$ mit $\varphi i \in \mathfrak{A}_i$. Im Falle $\mathfrak{I} = \{1, \ldots, n\}$ schreibe ich

[1]) Definition siehe DRESHER-ORE: Theory of Multigroups, Am. J. Math. 60 (1938), 705—733 (im folgenden als *M* zitiert). Eingeführt wurde dieser Begriff unter dem Namen „Hypergruppe" durch MARTY: Sur une généralisation de la notion de groupe, 8. Skand. Math. Kongress Stockholm 1934, 45—49.

[2]) Ich gebrauche das Wort „Struktur" in ähnlichem Sinn wie bei BOURBAKI: Éléments de Mathématique, Première Partie (Paris)

Livre I. Théorie des Ensembles, Fascicule de résultats (1939)

Livre II. Algèbre, Chapitre I (1942) (im folgenden als E I bzw. E II zitiert).

Bei BIRKHOFF: Lattice Theory (New York 1948) (im folgenden als *L* zitiert) tritt (s. S. VII) ein ähnlicher Begriff unter dem Namen „Algebra" auf.

Vgl. ferner den „Zusatz bei der Korrektur" am Schluß.

statt dessen auch $\mathfrak{A}_1 \times \cdots \times \mathfrak{A}_n$ und $(\varphi 1, \ldots, \varphi n)$ statt φ. Zwischen $\mathfrak{A}^{\mathfrak{J}}$ und $\mathfrak{A}^{\mathfrak{J}_0} \times \mathfrak{A}^{\mathfrak{J}-\mathfrak{J}_0}$ $(0 < \mathfrak{J}_0 < \mathfrak{J})$ wird kein Unterschied gemacht. Ist φ eine Abbildung von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$, so bezeichnet $\varphi\alpha$ für $\alpha \in \mathfrak{A}^{\mathfrak{J}}$ dasjenige Element von $\mathfrak{B}^{\mathfrak{J}}$ mit $(\varphi\alpha)i = \varphi(\alpha i)$ für $i \in \mathfrak{J}$. Relationen in der Menge $\mathfrak{A}$ werden — falls zweckmäßig — einfach als Teilmengen von $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ aufgefaßt. So bedeutet dann die aus allen Paaren (a, a) mit $a \in \mathfrak{A}$ bestehende *Diagonalmenge* $\Delta_{\mathfrak{A}}$ die Gleichheitsrelation.

1. 1. Als *Struktur* über der nichtleeren Menge $\mathfrak{A}$ bezeichne ich ein Mengenpaar $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$, bei dem mit einer gewissen nichtleeren Menge $\mathfrak{J}$ die Beziehung $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{A}^{\mathfrak{J}}$ gilt. $\mathfrak{J}$ heißt dann die *Indexmenge* der Struktur. Ist insbesondere $\mathfrak{J} = \{1, \ldots, n\}$, so wird die Struktur also einfach durch das in $\mathfrak{A}$ erklärte n-stellige Prädikat $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathfrak{S}$ gegeben. Bei beliebiger Indexmenge $\mathfrak{J}$ heißt die Struktur *vollständig bez.* $\mathfrak{J}_0$ $(0 < \mathfrak{J}_0 < \mathfrak{J})$, wenn sich jede Abbildung von $\mathfrak{J}_0$ in $\mathfrak{A}$ zu einer in $\mathfrak{S}$ enthaltenen Abbildung von $\mathfrak{J}$ in $\mathfrak{A}$ fortsetzen läßt. Gibt es zu jedem Element von $\mathfrak{A}^{\mathfrak{J}_0}$ höchstens eine solche Fortsetzung, so nenne ich die Struktur *abbildungsartig bez.* $\mathfrak{J}_0$, da ja $\mathfrak{S}$ dann einfach eine Abbildung einer Teilmenge von $\mathfrak{A}^{\mathfrak{J}_0}$ in $\mathfrak{A}^{\mathfrak{J}-\mathfrak{J}_0}$ bedeutet. Man schreibt in diesen Fällen zweckmäßigerweise $\mathfrak{A}^{\mathfrak{J}} = \mathfrak{A}^{\mathfrak{J}_0} \times \mathfrak{A}^{\mathfrak{J}-\mathfrak{J}_0}$. Eine *algebraische Struktur*[3]) mit überall definierten Verknüpfungen läßt sich dann beschreiben als eine bez. $\mathfrak{J}_0$ vollständige, abbildungsartige Struktur mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\mathfrak{J}_0 = \{1, \ldots, 2n\} \cup \mathfrak{J}'$, $\{1, \ldots, 2n\} \cap \mathfrak{J}' = 0$,
$\mathfrak{J} - \mathfrak{J}_0 = \{2n+1, \ldots, 3n\} \cup \mathfrak{J}''$, $\{2n+1, \ldots, 3n\} \cap \mathfrak{J}'' = 0$;

2. ι bildet $\mathfrak{J}'$ umkehrbar auf $\mathfrak{J}''$ ab;

3. $\mu(2n+i)$ $(i = 1, \ldots, n;\ \mu \in \mathfrak{S})$ hängt nur von μi und $\mu(n+i)$ ab, $\mu\iota i'$ $(i' \in \mathfrak{J}',\ \mu \in \mathfrak{S})$ nur von $\mu i'$.

Die Abbildungen $(\mu i,\ \mu(n+i)) \to \mu(2n+i)$ $(i = 1, \ldots, n$ fest!) von $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}$ sind dann die inneren Verknüpfungen, während die Abbildungen $\mu i' \to \mu\iota i'$ $(i' \in \mathfrak{J}'$ fest!) von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}$ die Wirkung der Operatoren bei den äußeren Verknüpfungen beschreiben.

1. 2. In Verallgemeinerung der Homomorphiedefinition bei algebraischen Strukturen nenne ich eine Abbildung σ von $\mathfrak{A}$ in (auf) $\mathfrak{A}'$ einen *Homomorphismus* der Struktur $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ in (auf) eine Struktur $(\mathfrak{A}', \mathfrak{S}')$ von gleicher Indexmenge, wenn $\sigma\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{S}'$ gilt. Im Falle $\sigma\mathfrak{S} = \mathfrak{S}'$ bezeichne ich den Homomorphismus von $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ *auf* $(\mathfrak{A}', \mathfrak{S}')$ als *regulär*. Offensichtlich ergibt die Hintereinanderausführung zweier (regulärer) Homomorphismen wieder einen (regulären) Homomorphismus. Man erkennt sofort, daß sich die Vollständigkeit bez. eines Indexmengenteiles bei einem Homomorphismus *auf* eine Struktur auf diese überträgt, während eine abbildungsartige Stuktur selbst durch einen regulären Homomorphismus in eine nicht abbildungsartige übergeführt

[3]) Bourbaki E II, S. 42. Auch die in L betrachteten „Algebren" sind vollständig und abbildungsartig bez. ein und derselben Menge.

werden kann. Homomorphismen zwischen vollständigen, abbildungsartigen Strukturen sind stets regulär, denn:

Ein Homomorphismus einer bez. $\mathfrak{Z}_0$ vollständigen Struktur auf eine bez. $\mathfrak{Z}_0$ abbildungsartige ist regulär.

Ist nämlich σ ein Homomorphismus von $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ auf $(\mathfrak{A}', \mathfrak{S}')$, so gibt es zu jedem $(\alpha', \beta') \in \mathfrak{S}' \leqq \mathfrak{A}'^{\mathfrak{Z}_0} \times \mathfrak{A}'^{\mathfrak{Z}-\mathfrak{Z}_0}$ ein $\alpha \in \mathfrak{A}^{\mathfrak{Z}_0}$ mit $\sigma\alpha = \alpha'$ und zu α ein $\beta \in \mathfrak{A}^{\mathfrak{Z}-\mathfrak{Z}_0}$ mit $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{S} \leqq \mathfrak{A}^{\mathfrak{Z}_0} \times \mathfrak{A}^{\mathfrak{Z}-\mathfrak{Z}_0}$. Die Homomorphiebedingung liefert dann $(\alpha', \sigma\beta) \in \mathfrak{S}'$, so daß $\sigma\beta = \beta'$ und damit $(\alpha', \beta') \in \sigma\mathfrak{S}$ sein muß. Das bedeutet aber $\mathfrak{S}' \leqq \sigma\mathfrak{S}$.

1. 3. Ist die umkehrbare Abbildung σ von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}'$ ein Homomorphismus von $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ auf $(\mathfrak{A}', \mathfrak{S}')$, so braucht σ^{-1} kein Homomorphismus von $(\mathfrak{A}', \mathfrak{S}')$ auf $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ zu sein: Man setze z. B. $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{S} < \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$, $\mathfrak{S}' = \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ und nehme für σ die identische Abbildung von $\mathfrak{A}$. Ist aber σ^{-1} ebenfalls ein Homomorphismus, so wird σ ein *Isomorphismus* genannt[4]). σ^{-1} ist dann ebenfalls ein Isomorphismus. Offensichtlich gilt:

Eine umkehrbare homomorphe Abbildung ist genau dann ein Isomorphismus, wenn sie regulär ist.

Zusammen mit dem vorhergehenden Satz ergibt sich daraus die für algebraische Strukturen bekannte Tatsache, daß umkehrbare homomorphe Abbildungen zwischen vollständigen, abbildungsartigen Strukturen stets Isomorphismen sind. Während sich dies für beliebige Strukturen nicht behaupten läßt, kann man doch den folgenden Satz allgemein beweisen:

Ist τ ein Homomorphismus von $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ auf $(\mathfrak{A}', \mathfrak{S}')$, σ ein solcher von $(\mathfrak{A}', \mathfrak{S}')$ auf $(\mathfrak{A}'', \mathfrak{S}'')$ und $\sigma \cdot \tau$ ein Isomorphismus, so sind auch σ und τ Isomorphismen.

Einmal folgt nämlich bekanntermaßen die Umkehrbarkeit von σ und τ aus der von $\sigma \cdot \tau$. Weiter ergeben $(\sigma \cdot \tau)\mathfrak{S} = \mathfrak{S}''$ und $\tau\mathfrak{S} \leqq \mathfrak{S}'$ die Beziehung $\mathfrak{S}'' \leqq \sigma\mathfrak{S}'$, also die Regularität von σ. Aus $(\sigma \cdot \tau)\mathfrak{S} = \mathfrak{S}''$ und $\sigma\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}''$ erhält man schließlich $\tau\mathfrak{S} = \sigma^{-1}\mathfrak{S}'' = \mathfrak{S}'$, also die Regularität von τ. — Man bemerkt bei diesem Beweis, daß sich die Regularität von σ ohne die Benutzung der Umkehrbarkeit allein aus der Regularität von $\sigma \cdot \tau$ gewinnen läßt. τ jedoch braucht nicht regulär zu sein, wenn lediglich die Regularität von $\sigma \cdot \tau$ gefordert ist: Man setze $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' = \{1, 2\}$, $\mathfrak{A}'' = \{1\}$, $\mathfrak{S} = \{(1, 2)\}$, $\mathfrak{S}' = \{(1, 2), (1, 1)\}$, $\mathfrak{S}'' = \{(1, 1)\}$ und nehme für τ die identische Abbildung von $\mathfrak{A}$.

1. 4. Ist eine Struktur $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ gegeben, so gibt es zu jeder Abbildung φ von $\mathfrak{A}$ genau eine Struktur so, daß φ ein regulärer Homomorphismus von $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ auf diese ist: nämlich $(\varphi\mathfrak{A}, \varphi\mathfrak{S})$. Das gilt insbesondere, wenn φ die Restklassenabbildung bez. einer Äquivalenzrelation ist, d. h. jedem Element von $\mathfrak{A}$ die Menge der ihm äquivalenten Elemente zuordnet. Umgekehrt liefert jeder Homomorphimus σ von $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ auf

[4]) Übereinstimmend mit der Definition in E I, S. 44. In *M*, S. 708 ist dagegen die Forderung hinsichtlich σ^{-1} fortgelassen.

$(\mathfrak{A}', \mathfrak{S}')$ eine Äquivalenzrelation $\sigma a = \sigma b$ in $\mathfrak{A}$, für deren Restklassenabbildung φ also $\varphi a = \varphi b$ dasselbe bedeutet wie $\sigma a = \sigma b$. Es gibt daher genau eine umkehrbare Abbildung τ von $\varphi\,\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}'$ mit $\tau \cdot \varphi = \sigma$. Diese ist wegen $\tau(\varphi\,\mathfrak{S}) = \sigma\,\mathfrak{S} \leqq \mathfrak{S}'$ ein Homomorphismus von $(\varphi\,\mathfrak{A}, \varphi\,\mathfrak{S})$ auf $(\mathfrak{A}', \mathfrak{S}')$ und — wenn man noch σ als regulär voraussetzt — ebenfalls regulär, also ein Isomorphismus. An Stelle des von den algebraischen Strukturen her bekannten Homomorphiesatzes ergibt sich somit:

Den regulären Homomorphismen einer Struktur über der Menge $\mathfrak{A}$ sind die sämtlichen Äquivalenzrelationen in $\mathfrak{A}$ so zugeordnet, daß zwei Homomorphismen genau dann dieselbe Äquivalenzrelation entspricht, wenn sie sich nur um einen Isomorphismus unterscheiden.

Setzt man jetzt $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ als vollständig bez. $\mathfrak{J}_0$ voraus und will die bez. $\mathfrak{J}_0$ abbildungsartigen homomorphen Bilder auffinden, so kommen nach 1. 2 nur reguläre Homomorphismen in Frage. In dem eben hergeleiteten Satz muß man dann offensichtlich die Äquivalenzrelationen $a \equiv b$ durch die folgende Bedingung einschränken: Bei zwei Abbildungen μ, ν aus $\mathfrak{S}$ zieht die Gültigkeit von $\mu i \equiv \nu i$ für alle $i \in \mathfrak{J}_0$ die Gültigkeit dieser Äquivalenz für alle $i \in \mathfrak{J} - \mathfrak{J}_0$ nach sich. Die Bedingung geht bei den algebraischen Strukturen in die bekannten Verträglichkeitsbedingungen [5]) über.

1. 5. Von einer Struktur $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ gelangt man zu einer neuen Struktur über $\mathfrak{A}$, indem man Operatoren einführt, also eine äußere Verknüpfung definiert. Ich beschränke mich hier auf den Fall eines einzigen Operators, also einer Abbildung μ von $\mathfrak{A}$ in sich, weil dabei schon alles Wesentliche des allgemeinen Falles auftritt. Die neue Struktur $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S}^*)$ wird dann durch $\mathfrak{S}^* = \mathfrak{S} \times \mathfrak{M}$ gegeben, wo $\mathfrak{M}$ die Menge der Paare $(a, \mu a)$ $(a \in \mathfrak{A})$ ist. Bei einer weiteren Struktur $(\mathfrak{A}', \mathfrak{S}')$ sei ebenfalls ein Operator μ' eingeführt und entsprechend $(\mathfrak{A}', \mathfrak{S}'^*)$ gebildet. Ein Homomorphismus σ von $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ in $(\mathfrak{A}', \mathfrak{S}')$ heißt dann *Operatorhomomorphismus* (bez. μ, μ'), wenn er zugleich Homomorphismus von $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S}^*)$ auf $(\mathfrak{A}', \mathfrak{S}'^*)$ ist. Als Bedingung dafür ergibt sich sofort $\sigma \mu a = \mu' \sigma a$ für alle $a \in \mathfrak{A}$. Von besonderer Bedeutung ist bekanntlich der Fall, daß der Operator μ ein Homomorphismus von $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ in sich ist. Bezüglich der entsprechenden Eigenschaft von μ' gilt nun:

Die Homomorphieeigenschaft eines Operators überträgt sich bei regulärem Operatorhomomorphismus.

Denn wegen $\sigma\,\mathfrak{S} = \mathfrak{S}'$ hat man $\mu'\,\mathfrak{S}' = \mu' \sigma\,\mathfrak{S} = \sigma \mu\,\mathfrak{S} \leqq \sigma\,\mathfrak{S} = \mathfrak{S}'$. Daß die Voraussetzung der Regulärität von σ als Homomorphismus von $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ auf $(\mathfrak{A}', \mathfrak{S}')$ nicht überflüssig ist, erkennt man an folgendem Beispiel: $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' = \{1, 2\}$, $\mathfrak{S} = \{(1, 2), (2, 1)\}$, $\mathfrak{S}' = \{(1, 2), (2, 1), (1, 1)\}$, $\sigma 1 = 1$, $\sigma 2 = 2$, $\mu 1 = 2$, $\mu 2 = 1$, $\mu = \mu'$.

[5]) Siehe E II, S. 44, 45. In *L.* S. VIII werden die entsprechenden Bedingungen als Substitutionseigenschaft bezeichnet.

1.6. Vielfach ist es vorteilhaft, von einer Struktur $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ zu einer abbildungsartigen Struktur über $\mathfrak{P}(\mathfrak{A})$ überzugehen, deren Bildung ich hier nur bei der Indexmenge $\{1, 2, 3\}$ angeben will, um die Bezeichnungen zu vereinfachen. Dieser später noch benötigte Sonderfall enthält schon alles Wesentliche des Verfahrens. Zu zwei Elementen $A, B \in \mathfrak{P}(\mathfrak{A})$ wird als AB die Menge derjenigen $x \in \mathfrak{A}$ definiert, zu denen es Elemente $a \in A$, $b \in B$ mit $(a, b, c) \in \mathfrak{S}$ gibt. Mit $\overline{\mathfrak{S}}$ als Menge aller Tripel (A, B, AB) ist dann $(\mathfrak{P}(\mathfrak{A}), \overline{\mathfrak{S}})$ eine bez. $\{1, 2\}$ vollständige abbildungsartige Struktur[6]). Da $c \in \{a\}\{b\}$ dasselbe bedeutet wie $(a, b, c) \in \mathfrak{S}$, bestimmt die neue Struktur die alte eindeutig. Zu einer weiteren Struktur $(\mathfrak{A}', \mathfrak{S}')$ werde nun in entsprechender Weise die Struktur $(\mathfrak{P}(\mathfrak{A}'), \overline{\mathfrak{S}}')$ gebildet. Wann ist dann ein Homomorphismus σ von $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ auf $(\mathfrak{A}', \mathfrak{S}')$ zugleich ein solcher von $(\mathfrak{P}(\mathfrak{A}), \overline{\mathfrak{S}})$ auf $(\mathfrak{P}(\mathfrak{A}'), \overline{\mathfrak{S}}')$?

Das trifft zu, wenn $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ *vollständig und* $(\mathfrak{A}', \mathfrak{S}')$ *abbildungsartig bez.* $\{1, 2\}$ *ist, während andererseits die Regularität des Homomorphismus eine notwendige Bedingung darstellt.*

Zum Beweis zeige ich zuerst, daß stets $(\sigma A)(\sigma B) \geqq \sigma(AB)$ gilt. Aus $c' \in \sigma(AB)$ folgt nämlich, daß es Elemente $a \in A$, $b \in B$, c mit $c' = \sigma c$ und $(a, b, c) \in \mathfrak{S}$ gibt, und daraus folgt $(\sigma a, \sigma b, c') \in \sigma\mathfrak{S} \leqq \mathfrak{S}'$, also $c' \in (\sigma A)(\sigma B)$. Ist nun $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ vollständig und $(\mathfrak{A}', \mathfrak{S}')$ abbildungsartig bez. $\{1, 2\}$, so gilt $\sigma(\{a\}\{b\}) > 0$ und $(\sigma\{a\})(\sigma\{b\})$ enthält genau ein Element. Aus der eben bewiesenen Beziehung ergibt sich daher $(\sigma\{a\})(\sigma\{b\}) = \sigma(\{a\}\{b\})$. Mit Hilfe von $AB = \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} \{a\}\{b\}$ folgt daraus weiter $(\sigma A)(\sigma B) = \sigma(AB)$, und das ist gerade die Homomorphiebedingung für die Strukturen $(\mathfrak{P}(\mathfrak{A}), \overline{\mathfrak{S}})$ und $(\mathfrak{P}(\mathfrak{A}'), \overline{\mathfrak{S}}')$. Umgekehrt folgt für $(\sigma a, \sigma b, c') \in \mathfrak{S}'$ aus der Gleichung $(\sigma\{a\})(\sigma\{b\}) = \sigma(\{a\}\{b\})$, daß $c' \in \sigma(c)$ mit $(a, b, c) \in \mathfrak{S}$, also $(\sigma a, \sigma b, c') \in \sigma\mathfrak{S}$ gilt. σ muß also regulär sein.

Daß keine der beiden Bedingungen notwendig *und* hinreichend zugleich ist, zeigen die Beispiele:

1) $\mathfrak{A} = \{1, 2, 3\}$, $\mathfrak{A}' = \{1, 2\}$, $\sigma 1 = 1$, $\sigma 2 = \sigma 3 = 2$,
$\mathfrak{S} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3)\}$, $\mathfrak{S}' = \sigma\mathfrak{S}$;

2) $\mathfrak{A} = \{1, 2\}$, $\mathfrak{A}' = \{1\}$, $\sigma 1 = \sigma 2 = 1$,
$\mathfrak{S} = \{(1, 1, 1)\}$, $\mathfrak{S}' = \sigma\mathfrak{S}$.

2.1. Zu einer Menge $\mathfrak{J}$ seien die Strukturen $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{S}_j)$ $(j \in \mathfrak{J})$ mit der gemeinsamen Indexmenge $\mathfrak{J}$ gegeben. Als deren *direkte Vereinigung*[7]) $\times_{j \in \mathfrak{J}} (\mathfrak{A}_j, \mathfrak{S}_j)$ bezeichne ich die Struktur $(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{S}^*)$ mit $\mathfrak{A}^* = \times_{j \in \mathfrak{J}} \mathfrak{A}_j$ und $\mathfrak{S}^*$ als Menge derjenigen Abbildungen μ von $\mathfrak{J}$ in $\mathfrak{A}^*$, für die es zu jedem $j \in \mathfrak{J}$ ein $\mu_j \in \mathfrak{S}_j$ mit $(\mu i) j = \mu_j i$ $(i \in \mathfrak{J})$ gibt. $\mathfrak{S}^*$ wird auf diese Weise eineindeutig auf die Menge $\times_{j \in \mathfrak{J}} \mathfrak{S}_j$ abgebildet. Wie man leicht erkennt,

[6]) Statt des Index 3 könnte man natürlich auch einen anderen auszeichnen.

[7]) Vgl. *L*, S. VIII.

ist $(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{S}^*)$ genau dann vollständig oder ableitungsartig bez. $\mathfrak{J}_0$, wenn alle $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{S}_j)$ diese Eigenschaft haben. Eine Struktur $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ heißt *subdirekte Vereinigung*[8]) der $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{S}_j)$, wenn 1) $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{A}^*$, 2) $\mathfrak{A}_j$ die Menge der αj $(\alpha \in \mathfrak{A})$, 3) $\mathfrak{S} \leqq \mathfrak{S}^*$ und 4) $\mathfrak{S}_j$ die Menge der μ_j $(\mu \in \mathfrak{S})$ ist. Die 4. Bedingung ist eine Folge der ersten drei, wenn $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ vollständig und die $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{S}_j)$ abbildungsartig bez. $\mathfrak{J}_0$ sind. Bei festem $\nu \in \mathfrak{S}_j$ gibt es wegen der 2. Bedingung zu jedem $i \in \mathfrak{J}_0$ ein $\alpha_i \in \mathfrak{A}$ mit $\alpha_i j = \nu i$ $(\in \mathfrak{A}_j)$; nach Voraussetzung über $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ gibt es weiter ein $\mu \in \mathfrak{S}$ mit $\mu i = \alpha_i$ $(i \in \mathfrak{J}_0)$; daher ist $\mu_j i = (\mu i) j = \alpha_i j = \nu i$ für $i \in \mathfrak{J}_0$, also wegen der über $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{S}_j)$ gemachten Voraussetzung $\mu_j = \nu$, w. z. b. w. Weil in diesem Fall $(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{S}^*)$ ebenfalls abbildungsartig bez. $\mathfrak{J}_0$ ist, gilt dann wegen der 3. Bedingung dasselbe für $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$, so daß sich die 3. Bedingung in diesem Fall sogar zu $\mathfrak{S} = \mathfrak{A}^{\mathfrak{J}} \cap \mathfrak{S}^*$ verschärfen läßt. Daß aber sowohl wenn $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ nicht vollständig als auch wenn ein $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{S}_j)$ nicht abbildungsartig ist, die 4. Bedingung nicht mit den drei ersten zugleich erfüllt zu sein braucht, zeigen die folgenden beiden Beispiele, bei denen noch $\mathfrak{S} = \mathfrak{A}^{\mathfrak{J}} \cap \mathfrak{S}^*$ gewählt ist:

1) $\mathfrak{J} = \mathfrak{J} = \{1, 2\}$, $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \{1, 2\}$, $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2 = \{(1, 1), (2, 1)\}$, $\mathfrak{A} = \{(1, 2), (2, 1)\}$, $\mathfrak{S} = 0$, so daß kein Element der $\mathfrak{S}_j$ die Gestalt μ_j hat.

2) $\mathfrak{J} = \mathfrak{J} = \{1, 2\}$, $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \{1, 2\}$, $\mathfrak{S}_1 = \{(1, 2), (2, 1)\}$, $\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A} = \{(1, 2), (2, 1)\}$, $\mathfrak{S} = \{((1, 2), (2, 1)), ((2, 1), (1, 2))\}$, so daß $(1, 1)$ und $(2, 2)$ aus $\mathfrak{S}$, nicht die Gestalt μ_z haben.

Daß bei einer subdirekten Vereinigung nicht immer $\mathfrak{S} = \mathfrak{A}^{\mathfrak{J}} \cap \mathfrak{S}^*$ zu sein braucht, zeigt das Beispiel

3) $\mathfrak{J}, \mathfrak{J}, \mathfrak{A}_j, \mathfrak{S}_j$ wie in Beispiel 1, $\mathfrak{A} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$,
$\mathfrak{S} = \{((1, 2), (1, 1)), ((2, 1), (1, 1))\}$, $\mathfrak{A}^{\mathfrak{J}} \cap \mathfrak{S}^* = \mathfrak{S} \cup \{((1, 1), (1, 1))\}$.

2. 2. *Bei einer subdirekten Vereinigung* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ *der* $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{S}_j)$ $(j \in \mathfrak{J})$ *wird durch* $\sigma_j \alpha = \alpha j$ *ein regulärer Homomorphismus* σ_j *von* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ *auf* $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{S}_j)$ *definiert.*

Denn einmal ist σ_j nach der 2. Bedingung (in 2. 1) eine Abbildung von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}_j$. Weiter gilt wegen $\mu i \in \mathfrak{A}$ für ein $\mu \in \mathfrak{S}$ die Gleichung $(\sigma_j \mu) i = \sigma_j (\mu i) = (\mu i) j = \mu_j i$ $(i \in \mathfrak{J})$, also $\sigma_j \mu = \mu_j$. Aus der 4. Bedingung (in 2. 1) folgt daher $\sigma_j \mathfrak{S} = \mathfrak{S}_j$, womit alles bewiesen ist. — Die σ_j nenne ich die *Zerlegungshomomorphismen* der subdirekten Vereinigung.

Da aus $\sigma_j a = \sigma_j b$ (für alle $j \in \mathfrak{J}$) stets $a = b$ folgt $(a, b \in \mathfrak{A})$, gilt für die zugehörigen Äquivalenzrelationen $\mathfrak{R}_j$ (= Menge der (a, b) mit $\sigma_j a = \sigma_j b$) die Beziehung $\bigcap_{j \in \mathfrak{J}} \mathfrak{R}_j = \Delta_{\mathfrak{A}}$. Seien nun umgekehrt zu einer Menge $\mathfrak{J}$ und einer Struktur $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ mit der Indexmenge $\mathfrak{J}$ Äquivalenzrelationen $\mathfrak{R}_j$ $(j \in \mathfrak{J})$ gegeben, welche dieser Beziehung genügen, so betrachte man die zugehörigen Restklassenabbildungen φ_j, so daß also $\varphi_j a$ die Menge der b mit $(a, b) \in \mathfrak{R}_j$ ist. Weiter wird die direkte

[8]) Vgl. *L*, S. 91.

Vereinigung $(\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{S}})$ der $(\varphi_j\mathfrak{A}, \varphi_j\mathfrak{S})$ gebildet und durch $(\sigma a)\,j = \varphi_j a$ eine Abbildung σ von $\mathfrak{A}$ in $\overline{\mathfrak{A}}$ definiert. Wegen $\bigcap_{j\in\mathfrak{J}} \mathfrak{R}_j = \Delta_{\mathfrak{A}}$ ist σ umkehrbar und somit ein Isomorphismus von $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ auf $(\sigma\mathfrak{A}, \sigma\mathfrak{S})$. Von der Struktur $(\sigma\mathfrak{A}, \sigma\mathfrak{S})$ zeige ich jetzt, daß sie subdirekte Vereinigung der $(\varphi_j\mathfrak{A}, \varphi_j\mathfrak{S})$ ist. Die erste Bedingung dafür ist selbstverständlicherweise erfüllt, und die zweite folgt sofort aus $(\sigma a)\,j = \varphi_j a$. Für ein $\nu \in \mathfrak{S}$ gilt $((\sigma\nu)\,i)\,j = (\sigma(\nu\,i))\,j = \varphi_j(\nu\,i) = (\varphi_j\nu)\,i\,(i \in \mathfrak{J},\ j \in \mathfrak{J})$, also $\sigma\mathfrak{S} \leqq \overline{\mathfrak{S}}$. Damit ist die dritte Bedingung nachgewiesen. Für $\nu \in \mathfrak{S}$ gilt weiter $(\sigma\nu)_j\,i = ((\sigma\nu)\,i)\,j = (\varphi_j\nu)\,i$, womit auch die vierte Bedingung bewiesen ist. Wegen $(\varphi_j\sigma^{-1})\,(\sigma a) = \varphi_j a = (\sigma a)\,j$ gilt für die Zerlegungshomomorphismen σ_j der subdirekten Vereinigung $\sigma_j \cdot \sigma = \varphi_j$.

Dem bei Birkhoff[9]) eingeführten Sprachgebrauch folgend nenne ich bei umkehrbarer Abbildung σ von $\mathfrak{A}$ eine subdirekte Vereinigung $(\sigma\mathfrak{A}, \sigma\mathfrak{S})$ der $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{S}_j)\,(j \in \mathfrak{J})$: *Darstellung von* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ *als subdirekte Vereinigung.* Ich bezeichne sie weiter als *zu* $\mathfrak{J}$ *gehörig.* Durch den Zerlegungshomomorphismus σ_j wird dann in $\mathfrak{A}$ die Äquivalenzrelation $\sigma_j\sigma\,a = \sigma_j\sigma\,b$ hervorgerufen, so daß man eine Abbildung ϱ von $\mathfrak{J}$ in die Menge der Äquivalenzrelationen von $\mathfrak{A}$ erhält. Damit eine weitere, ebenfalls zu $\mathfrak{J}$ gehörige (durch Striche gekennzeichnete) Darstellung dieselbe Abbildung ergibt, ist notwendig und hinreichend das Vorhandensein von umkehrbaren Abbildungen τ_j von $\mathfrak{A}_j$ auf $\mathfrak{A}'_j$ mit $\tau_j \cdot \sigma_j \cdot \sigma = \sigma'_j \cdot \sigma'$; diese sind wegen $\tau_j\mathfrak{S}_j = \tau_j\sigma_j\sigma\mathfrak{S} = \sigma'_j\sigma'\mathfrak{S}'_j$ sogar Isomorphismen von $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{S}_j)$ auf $(\mathfrak{A}'_j, \mathfrak{S}'_j)$. Nennt man bei Vorhandensein solcher τ_j die beiden Darstellungen *äquivalent*, so kann man die gewonnenen Ergebnisse so zusammenfassen[10]):

Die Klassen äquivalenter, zu $\mathfrak{J}$ *gehöriger Darstellungen einer Struktur* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ *als subdirekte Vereinigung entsprechen eineindeutig den Abbildungen* ϱ *von* $\mathfrak{J}$ *in die Menge der Äquivalenzrelationen von* $\mathfrak{A}$, *für welche* $\bigcap_{j\in\mathfrak{J}} \varrho\,j = \Delta_{\mathfrak{A}}$ *gilt.*

Nach Birkhoff[9]) bezeichne ich eine Struktur als *subdirekt irreduzibel*, wenn bei jeder Darstellung als subdirekte Vereinigung mindestens ein Zerlegungshomomorphismus ein Isomorphismus ist. Sehr einfach erhält man jetzt für eine Struktur $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ eine Darstellung als subdirekte Vereinigung subdirekt irreduzibler Strukturen auf folgende Weise. $\mathfrak{J}$ sei die Menge aller nichtleeren echten Teilmengen j von $\mathfrak{A}$ und $\varrho\,j$ die Menge aller Paare $(a, b) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$, für die entweder $a, b \in j$ oder $a, b \in \mathfrak{A} - j$ ist. Dann gilt offensichtlich $\bigcap_{j\in\mathfrak{J}} \varrho\,j = \Delta_{\mathfrak{A}}$, und jede Menge $\mathfrak{A}_j$ enthält genau zwei Elemente. Eine Struktur über einer Menge mit höchstens zwei Elementen ist aber stets subdirekt irre-

[9]) *L*, S. 92.

[10]) Vgl. *L*, S. 92, Theorem 9.

duzibel, weil dann höchstens zwei verschiedene Äquivalenzrelationen vorhanden sind. Aus der erhaltenen Darstellung einer Struktur als subdirekte Vereinigung subdirekt irreduzibler Strukturen erkennt man noch, daß keine Struktur über einer Menge von mehr als zwei Elementen subdirekt irreduzibel ist. In dieser Hinsicht bestehen also bei den hier betrachteten allgemeinen Strukturen dieselben Verhältnisse wie bei den distributiven Verbänden [11]).

3. 1. Im folgenden betrachte ich lediglich Strukturen mit der Indexmenge $\{1, 2, 3\}$. Es sei σ stets ein Homomorphismus der bez. $\{1, 3\}$ vollständigen Struktur $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ auf die bez. $\{1, 2\}$ und $\{1, 3\}$ abbildungsartige Struktur $(\mathfrak{A}', \mathfrak{S}')$, und in $\mathfrak{A}'$ gebe es ein Element e mit $(x, e, x) \in \mathfrak{S}'$ für alle $x \in \mathfrak{A}'$. Zur Beschreibung von $\mathfrak{S}$ verwende ich die in 1. 6 eingeführte Verknüpfung AB der Struktur $(\mathfrak{P}(\mathfrak{A}), \bar{\mathfrak{S}})$ und ferner die Verknüpfungen, welche sich bei Auszeichnung der anderen Indizes ergeben: $A\backslash B$ bzw. B/A sei die Menge der $x \in \mathfrak{A}$, zu denen es Elemente $a \in A$, $b \in B$ mit $(a, x, b) \in \mathfrak{S}$ bzw. $(x, a, b) \in \mathfrak{S}$ gibt. Falls $A = \{a\}$ oder $B = \{b\}$ ist, werde ich in AB, $A\backslash B$, B/A einfachheitshalber A durch a bzw. B durch b ersetzen. Da für nichtleere A, B wegen der Vollständigkeit von $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ stets $A\backslash B > 0$ ist, gilt $A(A\backslash B) \geqq B$ für $A > 0$. Da $(\mathfrak{A}', \mathfrak{S}')$ bez. $\{1, 2\}$ abbildungsartig ist, kann man zur Beschreibung von $\mathfrak{S}'$ folgende Festsetzung treffen: Falls es zu $a, b \in \mathfrak{A}'$ ein x mit $(a, b, x) \in \mathfrak{S}'$ gibt, wird dieses mit $a \cdot b$ bezeichnet, so daß $a \cdot b = c$ gleichbedeutend ist mit $(a, b, c) \in \mathfrak{S}'$. Danach ist für e die Bezeichnung *rechtsneutrales Element* gerechtfertigt.

Durch den Homomorphiesatz für Gruppen wird jetzt nahegelegt, σ durch die Menge E der x mit $\sigma x = e$ zu beschreiben. Als Hilfsmittel dient dazu natürlich die Äquivalenzrelation $\sigma a = \sigma b$, die ich $a \equiv b$ schreiben will. Aus $a \equiv b$ folgt für $x \in a\backslash b$ die Gleichung $\sigma a \cdot \sigma x = \sigma b = \sigma a$ und somit $\sigma x = e$, weil ja $(\mathfrak{A}', \mathfrak{S}')$ bez. $\{1, 3\}$ abbildungsartig ist. $a \equiv b$ zieht daher $a\backslash b \leqq E$ nach sich. Aus $a\backslash b \leqq E$ folgt $\{b\} \leqq a(a\backslash b) \leqq aE$, also $b \in aE$ und daraus weiter $\sigma a = \sigma a \cdot e = \sigma b$, d. h. $a \equiv b$. Es sind somit gleichbedeutend die drei Aussagen:

$$a \equiv b, \quad a\backslash b \leqq E, \quad b \in aE.$$

Der Homomorphismus σ ist nach 1. 2. regulär und wird daher nach 1. 4. bis auf Isomorphie durch die Äquivalenzrelation $a \equiv b$ gekennzeichnet. Man hat also zwei Möglichkeiten, σ durch die Menge E zu beschreiben. Welche Mengen E kommen nun dafür in Frage? Eine erste Antwort gewinnt man durch Verwenden der Beziehung $a\backslash b \leqq E$:

Eine Menge $E \leqq \mathfrak{A}$ ist dann und nur dann bei einem Homomorphismus σ Menge der Urbilder eines rechtsneutralen Elements, wenn

I. *$a\backslash b \leqq E$ eine Äquivalenzrelation $a \equiv b$ in $\mathfrak{A}$ ist,*

II. *unter den Voraussetzungen $c_i \in a_i b_i$ $(i = 1, 2)$ und $a_1 \equiv a_2$ die Beziehungen $b_1 \equiv b_2$, $c_1 \equiv c_2$ gleichwertig sind.*

[11]) Siehe *L*, S. 140.

III. $E \backslash E \subseteq E$,
IV. $EE \subseteq E$.

Die Notwendigkeit von I ist nach dem Vorhergehenden selbstverständlich, und die von II folgt daraus, daß $(\mathfrak{A}', \mathfrak{S}')$ ja bez. $\{1, 2\}$ und $\{1, 3\}$ abbildungsartig sein soll. III bedeutet offensichtlich einfach $a \equiv b$ für alle $a, b \in E$ und ist daher notwendig. IV schließlich folgt daraus, daß sich aus $a, b \in E$ und $c \in ab$ die Gleichung $\sigma c = \sigma a \cdot \sigma b = e \cdot e = e$, also $c \in E$ ergibt. Erfüllt nun eine Menge $E \subseteq \mathfrak{A}$ die vier Bedingungen, so nimmt man für σ die zu $a \equiv b$ gehörige Restklassenabbildung und setzt $\mathfrak{A}' = \sigma\mathfrak{A}$, $\mathfrak{S}' = \sigma\mathfrak{S}$. Dann zeigt II, daß $(\mathfrak{A}', \mathfrak{S}')$ abbildungsartig bez. $\{1, 2\}$ und $\{1, 3\}$ ist. Zu jedem $a \in \mathfrak{A}$ gibt es wegen $a \equiv a$ ein $b \in a \backslash a \cap E$. Für die wegen II durch a eindeutig bestimmte Restklasse σb gilt also $\sigma b \cap E > 0$. Da nach III je zwei Elemente von E äquivalent sind, hängt $\sigma b = e$ nicht mehr von a ab, und es gilt $E \subseteq e$. Somit ist e das gewünschte rechtsneutrale Element. Aus $a \in E$, $b \in e$ folgt nun $a \equiv b$, also $a \backslash b \subseteq E$. Mittels IV ergibt sich daraus $\{b\} \subseteq a(a \backslash b) \subseteq aE \subseteq EE \subseteq E$, also $b \in E$ und somit $E = e$. Damit ist alles bewiesen. Daß IV nicht aus I—III folgt, zeigt das Beispiel: $\mathfrak{A} = \{1, 2\}$, $\mathfrak{S} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (2, 1, 1), (2, 1, 2)\}$, $E = \{1\}$, bei dem man $e = \{1, 2\}$ erhält.

3. 2. Von jetzt ab werde $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ auch noch bez. $\{1, 2\}$ als vollständig vorausgesetzt. Durch Verwenden der Beziehung $b \in aE$ erhält man dann das Ergebnis:

Eine Menge $E \subseteq \mathfrak{A}$ ist dann und nur dann bei einem Homomorphismus σ Menge der Urbilder eines rechtsneutralen Elements, wenn

I. $b \in aE$ *eine Äquivalenzrelation* $a \equiv b$ *in* $\mathfrak{A}$ *ist,*
II. *unter den Voraussetzungen* $c_i \in a_i b_i$ $(i = 1, 2)$ *und* $a_1 \equiv a_2$ *die Beziehungen* $b_1 \equiv b_2$, $c_1 \equiv c_2$ *gleichwertig sind,*
III. $EE \subseteq E$.

Die Notwendigkeit der Bedingungen erkennt man wie beim vorigen Satz. Ganz genau so wie dort nutzt man dann weiter I und II aus. Zu einem $a \in \mathfrak{A}$ und einem $b \in E$ bestimmt man nun ein $c \in ab$. Wegen $ab \subseteq aE$ ist also $a \equiv c$, und man hat $\sigma a \cdot \sigma b = \sigma a$. Wegen II ist also σb unabhängig von b eindeutig durch a bestimmt, so daß $E \subseteq \sigma b$ gilt. Auf Grund dieser Beziehung nun hängt $\sigma b = e$ auch nicht mehr von a ab: e ist das gewünschte rechtsneutrale Element. Aus $a \in E$, $b \in e$ folgt nun $a \equiv b$. Mittels III erhält man weiter $b \in aE \subseteq EE \subseteq E$, also $b \in E$ und somit $E = e$, w.z.b.w. Daß III keine Folge von I und II ist, zeigt das Beispiel: $\mathfrak{S} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$, $0 \subset E \subset \mathfrak{A}$, bei dem man $e = \mathfrak{A}$ erhält.

Bei Einführung eines Operators gilt weiter noch:

Soll σ sogar Operatorhomomorphismus bez. des Operators μ sein, der ein Homomorphismus von $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ ist, so muß noch die Bedingung $\mu E \subseteq E$ hinzugefügt werden.

Denn da ja σ regulär ist, überträgt sich nach 1. 5 die Homomorphieeigenschaft von μ auf den durch $\sigma\mu a = \mu'\sigma a$ bestimmten Operator von $(\mathfrak{A}', \mathfrak{S}')$ so daß $\mu' a' \cdot \mu' e = \mu' a'$ $(a' \in \mathfrak{A}')$ und daher $\mu' e = e$ gilt. Für $a \in E$, also $\sigma a = e$ ergibt sich somit $\sigma\mu a = \mu' e = e$, d. h. $\mu a \in E$, womit die Notwendigkeit der Bedingung bewiesen ist. Umgekehrt schließt man mittels der Beziehung von 1. 6 aus ihr $\mu(aE) \leqq (\mu a)(\mu E) \leqq (\mu a)E$. Aus $a \equiv b$, d. h. $b \in aE$, folgt somit $\mu a \equiv \mu b$. Mit σ als der Restklassenabbildung wird somit durch $\sigma\mu a = \mu'\sigma a$ wirklich eine Abbildung μ' von $\sigma\mathfrak{A}$ in sich gegeben. Damit ist die Bedingung auch als hinreichend erkannt. — Wie üblich nenne ich *E zulässig bez. des Operators* μ, falls die Bedingung $\mu E \leqq E$ erfüllt ist.

3. 3. Die in 3. 2 betrachteten Strukturen $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ schränke ich jetzt noch weiter ein durch das *Assoziativgesetz* $(ab)c = a(bc)$. Wegen der Voraussetzungen $ab > 0$ und $a\backslash b > 0$ erhält man so gerade die *Rechtsmultigruppen*[12]). Aus dem Assoziativgesetz folgt (übrigens ohne Benutzung von $ab > 0$ und $a\backslash b > 0$) für $A, B, C \in \mathfrak{P}(\mathfrak{A})$ die Beziehung

$$(AB)C = \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} (ab)C = \bigcup_{\substack{a \in A,\ b \in B \\ c \in C}} (ab)c = \bigcup_{\substack{a \in A,\ b \in B \\ c \in C}} a(bc) = A(BC).$$

Die nach 1. 6 gebildete Struktur $(\mathfrak{P}(\mathfrak{A}), \overline{\mathfrak{S}})$ ist also eine Halbgruppe. Daraus folgt:

Das Assoziativgesetz überträgt sich bei Homomorphismen einer bez. $\{1, 2\}$ *vollständigen auf eine bez.* $\{1, 2\}$ *abbildungsartige Struktur.* Denn nach 1. 6 ist ein solcher Homomorphismus ja auch Homomorphismus der zugeordneten Strukturen über den Teilmengenmengen. Dabei bleibt die Halbgruppeneigenschaft erhalten und daraus wieder folgt das Assoziativgesetz für die Bildstruktur.

Bei einem Homomorphismus von der in 3. 2 betrachteten Art entsteht somit als Bildstruktur eine Halbgruppe mit rechtsneutralem Element, in welcher die linksseitige Division ausführbar ist. Eine solche Halbgruppe ist aber bekanntlich eine Gruppe. Die Menge der Urbilder des neutralen Elements werde — wie in solchem Fall üblich — als *Kern* des Homomorphismus bezeichnet. Aus den Ergebnissen von 3. 2. gewinnt man jetzt den folgenden Satz:

Die Untermenge E einer Rechtsmultigruppe ist dann und nur dann Kern eines Homomorphismus auf eine Gruppe, falls die Bedingungen I. $a\backslash a \leqq E$, II. $E\backslash E \leqq E$, III. $EE \leqq E$, IV. $Ea \leqq aE$, V. $ab\backslash ab \leqq E$ *erfüllt sind. Besitzt die Rechtsmultigruppe Operatoren, welche sämtlich Homomorphismen sind, und soll der zum Kern E gehörige Homomorphismus ein Operatorhomomorphismus sein, so muß außerdem noch die Zulässigkeit von E bez. aller Operatoren gefordert werden.*

---

[12]) Siehe *M*, S. 707.

Die Notwendigkeit der Bedingungen I — V erkennt man sofort. Nach den Ergebnissen von 3. 2 und dem oben Gesagten braucht jetzt nur noch gezeigt zu werden, daß aus ihnen die Bedingungen I, II von 3. 2 folgen. Bei der zweiten dieser Bedingungen braucht man sogar nur $c_1 \equiv c_2$ aus $b_1 \equiv b_2$ zu folgern, da dann bereits nach dem oben Gesagten die durch Restklassenbildung sich ergebende Struktur eine Gruppe ist. Aus I ergibt sich, wie schon in 3. 1 nachgewiesen, $a \in a\,E$, also die Reflexivität der Relation $b \in a\,E$. Ist $b \in a\,E$, so kann man ein $c \in E$ mit $b \in a\,c$ finden. Bestimmt man weiter d so, daß $a \in b\,d$ ist, so folgt $a \in (a\,c)\,d = a\,(c\,d)$. Wegen I gibt es also ein $c' \in E \cap c\,d$. Das bedeutet $d \in c \backslash c' \leqq E \backslash E$. Mittels II folgt daraus $d \in E$, also $a \in b\,E$. Damit ist die Symmetrie der Relation bewiesen. Die Transitivität ergibt sich nun sofort mittels III: Wenn $b \in a\,E$ und $c \in b\,E$ ist, so gilt $c \in (a\,E)\,E = a\,(E\,E) \leqq a\,E$. Aus $c_i \in a_i b_i$ $(i = 1, 2)$, $a_1 \in a_2 E, b_2 \in b_1 E$ folgt mittels IV einmal $c_1 \in (a_2 E)\,b_1 = a_2 (E\,b_1) \leqq a_2 (b_1 E)$. Es gibt dann also ein $b' \equiv b$ mit $c_1 \in a_2 b'$. Andererseits folgt $c_2 \in a_2 (b_1 E)$ und daraus die Existenz eines $b'' \equiv b$ mit $c_2 \in a_2 b''$. Wegen $b'' \equiv b'$ ist daher $c_2 \in a_2 (b' E) = (a_2 b')\,E$, so daß es ein $c' \equiv c_2$ mit $c' \in a_2 b'$ gibt. Wegen V und $c_1 \in a_2 b'$ folgt daraus $c' \backslash c_1 \leqq E$ und somit $c_2 \equiv c' \equiv c_1$, w. z. b. w.

Ein entsprechender Satz gilt natürlich auch für Linksmultigruppen, bei denen also $b / a > 0$ statt $a \backslash b > 0$ gefordert wird. Um ihn zu erhalten, braucht man nur in den Bedingungen I, II, V $\backslash$ durch $/$ und in IV $\leqq$ durch $\geqq$ zu ersetzen.

Als Beispiel betrachte ich noch die Multigruppe der Linksnebenklassen $a\,\mathfrak{H}$ einer Untergruppe $\mathfrak{H}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$, bei der $\mathfrak{S}$ als die Menge der Nebenklassentripel $(a\,\mathfrak{H}, b\,\mathfrak{H}, c\,\mathfrak{H})$ mit $c \in a\,\mathfrak{H}\,b\,\mathfrak{H}$ gegeben ist. Die Bedingungen für E schreibt man besser um auf die Menge $\mathfrak{E} = \bigcup_{a\,\mathfrak{H} \in E} a\,\mathfrak{H}$. Dann bedeutet I einfach $\mathfrak{E} \geqq \mathfrak{H}$. Die Bedingungen II und III bedeuten $b^{-1} a \in \mathfrak{E}$ bzw. $a\,b \in \mathfrak{E}$ für $a, b \in \mathfrak{E}$, also die Gruppeneigenschaft von $\mathfrak{E}$. Bedingung IV besagt $\mathfrak{E}\,a\,\mathfrak{H} \leqq a\,\mathfrak{H}\,\mathfrak{E}$, d. h. $\mathfrak{E} \leqq a\,\mathfrak{E}\,a^{-1}$, liefert also die Normalteilerbedingung für $\mathfrak{E}$. Bedingung V ist wegen $(a h_1 b h_2)^{-1} (a h_3 b h_4) \in \mathfrak{E}$ $(h^i \in \mathfrak{H})$ von selbst erfüllt. Man erhält somit das von der Verallgemeinerung der Isomorphiesätze auf Multigruppen [13]) her bekannte Ergebnis:

Die zur Multigruppe der Linksnebenklassen einer Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ homomorphen Gruppen sind isomorph zu den Faktorgruppen von $\mathfrak{G}$ nach Normalteilern, welche $\mathfrak{H}$ enthalten.

Verwendet man die Bedingungen I — V in ihrer für Linksmultigruppen abgeänderten Form, so ergibt sich in gleicher Weise natürlich derselbe Satz für die Multigruppe der Rechtsnebenklassen.

---

[13]) Siehe z. B. MARTY: Rôle de la notion d'hypergroupe dans l'étude des groupes non abéliens, C. R. Paris 201 (1935), 636—638.

Zusatz bei der Korrektur, 16. 9. 50: Erst nach Fertigstellung der vorstehenden Arbeit lernte ich die Untersuchungen von K. Shoda „Allgemeine Algebra", Osaka Math. J. 1 (1949) S. 182—225, kennen, in der ebenfalls ein Homomorphiebegriff für allgemeine Strukturen der von mir behandelten Art eingeführt wird. Der Unterfall II bei Shoda umfaßt gerade die von mir als regulär bezeichneten Homomorphismen.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich noch bemerken, daß in meinem Satz über Homomorphismen von Rechtsmultigruppen auf Gruppen die Bedingung I aus V folgt, also überflüssig ist: Für ein $b \in a \backslash a$ gilt $a \in ab$ und daher wegen V $a \backslash a \leqq ab \backslash ab \leqq E$.

(Eingegangen am 2. Mai 1950.)

Mathematische Zeitschrift, Band 53, Heft 4, S. 387—402 (1950).

Komplexe Integrale für die parabolischen Funktionen mit dem wesentlich singulären Kern $\exp(-z/2\cdot\mathfrak{T}gs)$.

Von

Herbert Buchholz in Darmstadt.

1. Einleitende Bemerkungen.

Die beiden konfluenten hypergeometrischen Funktionen $M_{\varkappa,\mu/2}(z)$ und $W_{\varkappa,\mu/2}(z)$, die hier auch als parabolische Funktionen bezeichnet werden, lassen sich u. a. [1] durch die drei Linienintegrale

$$(1)\quad M_{\varkappa,\frac{\mu}{2}}(z)\equiv z^{\frac{1+\mu}{2}}e^{-z/2}\,{}_1F_1\Big(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa;1+\mu;z\Big)\Big/\Gamma(1+\mu)$$

$$=\frac{z^{\frac{1+\mu}{2}}}{2^\mu\,\Gamma\Big(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa\Big)\,\Gamma\Big(\frac{1+\mu}{2}+\varkappa\Big)}\int_{-1}^{+1}e^{-z\frac{t}{2}}(1-t^2)^{\frac{\mu-1}{2}}\Big(\frac{1+t}{1-t}\Big)^{\varkappa}dt$$

$$\Big(\Re\Big(\frac{1+\mu}{2}\pm\varkappa\Big)>0\Big)$$

$$(2)^*\quad W_{\varkappa,\frac{\mu}{2}}(z)=\frac{z^{\frac{1+\mu}{2}}}{2^\mu\,\Gamma\Big(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa\Big)}\int_{+1}^{\infty(\tau)}e^{-z\,t/2}(t^2-1)^{\frac{\mu-1}{2}}\Big(\frac{t+1}{t-1}\Big)^{\varkappa}dt$$

$$\Big(\Re\Big(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa\Big)>0\Big)$$

$$(\arc(t-1)=\tau,\ |\arc(t+1)|<\pi)$$

$$(3)^*\quad W_{-\varkappa,\frac{\mu}{2}}(z\,e^{\pm\pi i})=-\frac{(z\,e^{\mp\pi i})^{\frac{1+\mu}{2}}}{2^\mu\,\Gamma\Big(\frac{1+\mu}{2}+\varkappa\Big)}\int_{-1}^{\infty(\tau_\pm)}e^{-z\,t/2}(t^2-1)^{\frac{\mu-1}{2}}\Big(\frac{t+1}{t-1}\Big)^{\varkappa}dt$$

$$\Re\Big(\frac{1+\mu}{2}+\varkappa\Big)>0$$

ob. Vorz.: $2\pi>\tau_+>0$, $\operatorname{Arc}(t-1)=+\pi$; unt. Vorz.: $-2\pi<\tau_-<0$;
$|\arc(z)+\tau_\pm|<\pi/2$ $\operatorname{Arc}(t-1)=-\pi$.

*) In (2), (3) bedeutet $\infty(\tau)$, daß der weit entfernte Teil des Integrationsweges den Winkel τ mit der pos. Richtung der reellen t-Achse bildet. $\operatorname{Arc}(t\pm1)$ bedeutet den Phasenwinkel von $t\pm1$ zu Beginn des Weges.

definieren. Die Integraldarstellungen, mit denen sich diese Arbeit auseinandersetzt, gehen aus (1) ... (3) durch die Substitution $t = \mathfrak{Tg}\, s$ hervor. Sie zeigen in dieser Gestalt einige bemerkenswerte Besonderheiten. So treten z. B. bei ihnen Integrationswege auf, die selbst bei beliebigen Parametern ganz im Endlichen zwischen wesentlich singulären Punkten verlaufen. Sie eignen sich außerdem gut für die Anwendung der Sattelpunktsmethode [2], wenn es sich darum handelt, für die parabolischen Funktionen asymptotische Entwicklungen bei großen Werten von z und $\varkappa$ herzustellen. Ferner führen sie unmittelbar, wie sich zeigen wird, zu einigen merkwürdigen Fourierintegralen und zu besonderen Reihenentwicklungen und gewähren zwanglos den Anschluß an die Bateman-Funktion. Bevor wir jedoch mittels der obigen Substitution zu diesen Integraldarstellungen übergehen, soll an die wichtigsten Eigenschaften der Abbildung der t-Ebene auf die s-Ebene durch die Funktion $t = \mathfrak{Tg}\, s$ erinnert und dabei einige für das Folgende wesentliche Punkte zur Sprache gebracht werden.

2. Die Abbildung der t-Ebene auf die s-Ebene durch die Funktion $t = \mathfrak{Tg}\, s$.

Wir setzen im folgenden $t = t_1 + i\, t_2 = |t|\, e^{i\varphi}$ und $s = s_1 + i\, s_2$ und haben dann

$$(1a)\quad t_1 = \frac{\mathfrak{Sin}\, 2 s_1}{\mathfrak{Cof}\, 2 s_1 + \cos 2 s_2} \qquad (1b)\quad t_2 = \frac{\sin 2 s_2}{\mathfrak{Cof}\, 2 s_1 + \cos 2 s_2}$$

$$(1c)\quad |t| = \{(\mathfrak{Cof}\, 2 s_1 - \cos 2 s_2)/(\mathfrak{Cof}\, 2 s_1 + \cos 2 s_2)\}^{1/2} \quad (1d)\quad \operatorname{tg} \varphi = \sin(2 s_2)/\mathfrak{Sin}(2 s_1).$$

Da sich nach diesen Gleichungen die Werte für t_1 und t_2 reproduzieren, sobald s_2 um $\pi \bmod (\pi)$ zu- oder abgenommen hat, so wird die ganze t-Ebene bereits auf einen einzigen horizontalen Streifen der s-Ebene von der Breite π abgebildet. Die gegenseitige Zuordnung der wichtigsten markanten Punkte und Linien in der t- oder s-Ebene geht hinreichend deutlich aus Figur 1 hervor, so daß sich eine besondere Beschreibung erübrigt. Wir weisen lediglich darauf hin, daß die Umgebung der Punkte $t = \pm 1$ dabei in die weit entfernten rechten oder linken Streifenenden verlegt wird, während der Punkt ∞ der t-Ebene in die Umgebung der Punkte $s = \pi i/2 \cdot (2 p + 1)$ zu liegen kommt, die die singulären Stellen der Funktion $\mathfrak{Tg}\, s$ bilden.

Eine genauere Besprechung erfordert jedoch die Frage nach dem Einfluß der Phasenwinkel der beiden Binome $t \pm 1$ und der Funktion $\mathfrak{Cof}\, s$. Für diese Binome in (1) ... (3) erhält man mit Hilfe der Gl. (1a, b) die Formeln (3a, b). Über das Minuszeichen in (3a) ist dabei im Sinne von $e^{+\pi i}$ verfügt worden. Über den Phasenwinkel $\gamma = \arg(\mathfrak{Cof}\, s)$ in (3c) treffen wir ein für allemal die Festsetzung, daß ihm in irgend

$$(3a)\qquad t - 1 = -\frac{e^{-s}}{\mathfrak{Cof}\, s} = \frac{e^{+\pi i - s}}{\mathfrak{Cof}\, s} = \frac{e^{-s_1 + i(\pi - s_2 - \gamma)}}{\{(\mathfrak{Cof}\, 2 s_1 + \cos 2 s_2)/2\}^{1/2}}$$

$$(3\,b)\qquad t+1=\frac{e^{s}}{\mathfrak{Coj}\,s}=\frac{e^{+s_1+i(s_2-\gamma)}}{\{(\mathfrak{Coj}\,2s_1+\cos 2s_2)/2\}^{1/2}}$$

$$(3\,c)\qquad \mathfrak{Coj}\,s=\{(\mathfrak{Coj}\,2s_1+\cos 2s_2)/2\}^{1/2}e^{+i\gamma}$$

$$(3\,d)\qquad \operatorname{tg}\gamma=\mathfrak{Tg}\,s_1\operatorname{tg}s_2\qquad(\gamma=0\text{ für }s_1=0)$$

$$(3\,e)\qquad t^{2}-1=e^{+\pi i}/\mathfrak{Coj}^{2}s\qquad(3\,f)\quad\frac{t+1}{t-1}=e^{2s-\pi i}$$

$$(3\,g)\qquad t-1\to\begin{cases}2\,e^{-2s_1+i(\pi-2s_2)} & (s_1\to+\infty)\\ 2\,e^{+\pi i} & (s_1\to-\infty)\end{cases}$$

$$(3\,h)\qquad t+1\to\begin{cases}2 & (s_1\to+\infty)\\ 2\,e^{2s_1+2is_2} & (s_1\to-\infty)\end{cases}$$

einem beliebigen Punkt der s-Ebene stets derjenige Wert zugeschrieben werden soll, den er bei stetiger Fortsetzung auf dem jeweils anzugebenden Wege von seinem in der reellen s-Achse gelegenen Nullwert aus erreicht. Dabei merken wir zur besseren Übersicht noch an, daß, wenn der Weg durchweg auf einer und derselben Seite der imaginären s-Achse verläuft und der Endpunkt im Streifen $\pi/2\cdot(2p-1)<s_2<\pi/2\cdot(2p+1)$ liegt, auf der Seite

$s_1>0$ der Phasenwinkel γ den Ungl. $\pi(2p-1)/2<\gamma<\pi(2p+1)/2$

$s_1<0$ $\quad -\pi(2p+1)/2<\gamma<-\pi(2p-1)/2$

mit $p=0,\pm1,\pm2,\ldots$ genügt. Nähert sich der betrachtete Punkt innerhalb eines solchen Streifens zum ersten Mal von rechts herkommend der imaginären Achse, so geht $\gamma\to+\pi/2\cdot2p$. Von links herkommend geht $\gamma\to-\pi/2\cdot2p$. γ ändert sich also beim Überqueren der imaginären Achse einzig und allein im Streifen $-\pi/2<s_2<+\pi/2$ in stetiger Weise.

Ferner ist nach den Gl. (3 a, b, g, h) auf den Geraden $s_2=\pi/2\cdot p$

$$s_1>0\qquad \arc(t-1)=+\pi(1-p)\qquad \arc(t+1)=0$$

auf der Seite

$$s_1<0\qquad \arc(t+1)=+\pi p\qquad \arc(t-1)=\pi$$

Ein Geradenstück, das aus dem Punkt $t=+1$ unter dem Winkel φ mit $|\varphi|<\pi$ austritt, folgt also in den weit entfernten Teilen der rechten Halbstreifen im wesentlichen dem Verlauf der Geraden $s_2=\pi/2\cdot p-\varphi/2$. Tritt es unter diesem Winkel aus dem Punkt $t=-1$ aus, so verläuft es im linken Halbstreifen wie die Geraden $s_2=\pi/2\cdot p+\varphi/2$.

Schließlich ist noch die Frage zu klären, wie sich ein kurzes Geradenstück, das aus einem der singulären Punkte der s-Ebene unter dem Winkel ε gegen die positive Richtung der s_1-Achse heraustritt, auf die t-Ebene abbildet. Setzen wir demgemäß $s=+\pi i/2\cdot(2p+1)+\varrho\,e^{i\varepsilon}$ mit $\varrho>0$ und $\varepsilon\ll1$, so ergibt sich nach kurzer Rechnung aus den Gl. (3 a, b) der Zusammenhang $t\pm1\approx1/\varrho\,e^{-i\varepsilon}$. Dem besagten Geradenstück der s-Ebene entsprechen also in der t-Ebene die weit entfernten Teile einer Geraden, die unter dem Winkel $-\varepsilon$ in den Punkt ∞ einlaufen.

3. Integraldarstellungen für die einfachen parabolischen Funktionen.

Wir gehen nun zunächst daran, die Substitution $t = \mathfrak{Tg}\, s$ an den drei Integralen 1. (1) ... (3) vorzunehmen. Am einfachsten erledigt sich der Fall der Gl. (1). Aus ihr folgt sofort die Darstellung

$$(1) \qquad M_{\varkappa,\frac{\mu}{2}}(z) = \frac{z^{\frac{1+\mu}{2}}}{2^{\mu}\,\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa\right)\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}+\varkappa\right)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\varkappa s - z/2\cdot\mathfrak{Tg}\, s}\,\frac{ds}{(\mathfrak{Cof}\, s)^{\mu+1}}$$

$$\left(\Re\left(\frac{1+\mu}{2}\pm\varkappa\right)>0\right)$$

mit der dazu angegebenen früheren Beschränkung über μ und $\varkappa$. Bei der Umschreibung des Integrals 1. (2) ist zu beachten, daß darin für $\tau = 0$ auch $\arc(t-1) = 0$ zu setzen ist. Der dem Punkt ∞ der t-Ebene entsprechende Punkt in der s-Ebene kann daher nur die singuläre Stelle $s_2 = +\pi/2$ sein. Wir gelangen also zu der Beziehung

$$(2\,a) \qquad W_{\varkappa,\frac{\mu}{2}}(z) = \frac{z^{\frac{1+\mu}{2}}\, e^{-\pi i\varkappa+\frac{\pi i}{2}(1+\mu)}}{2^{\mu}\,\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa\right)} \int_{\frac{\pi i}{2}(-\tau)}^{+\infty(0,\pi)} e^{2\varkappa s - z/2\cdot\mathfrak{Tg}\, s}\,\frac{ds}{(\mathfrak{Cof}\, s)^{\mu+1}}$$

$$\Re\left(\varkappa-\frac{1+\mu}{2}\right)<0$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}<\arc(z)+\tau<+\frac{\pi}{2}\right) \qquad \left(\gamma=+\frac{\pi}{2}\ \text{auf}\ s_2=+\frac{\pi}{2}\right)$$

Die Schreibweise der unteren Integralgrenze soll darin besagen, daß der Integrationsweg aus dem wesentlich singulären Punkt $+\pi i/2$ unter dem Winkel $-\tau$ gegen die s_1-Achse austritt. In der unmittelbaren Umgebung dieser Stelle ist nämlich

$$\text{für}\ s = \pm\frac{\pi i}{2} + \varrho\, e^{+i\tau}\ (\varrho \ll 1) \qquad z/2\cdot\mathfrak{Tg}\, s \approx \frac{|z|}{2\varrho}\exp\{-i\tau + i\arc(z)\}.$$

τ und $\arc(z)$ müssen daher in (2a) in Rücksicht auf die Konvergenz des Integrals der unteren Grenze die dazu angeschriebene Ungleichung erfüllen. Die Angabe $(0, \pi)$ hinter dem Zeichen ∞ der oberen Integralgrenze soll bedeuten, daß der Weg im Streifen $0 < s_2 < \pi$ ins Unendliche ausläuft.

Der erste der beiden in Gl. (3) von Abschn. 1 zusammengefaßten Fälle geht durch die Substitution $t = \mathfrak{Tg}\, s$ in die Formel (3a) über.

$$(3\,a) \qquad W_{-\varkappa,\frac{\mu}{2}}(z\, e^{+\pi i}) = \frac{z^{\frac{1+\mu}{2}}\, e^{-\pi i\varkappa}}{2^{\mu}\,\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}+\varkappa\right)} \int_{-\infty(0,+\pi)}^{+\pi i/2(-\tau_+)} e^{2\varkappa s - z/2\cdot\mathfrak{Tg}\, z}\,\frac{ds}{(\mathfrak{Cof}\, s)^{\mu+1}}$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}<\arc(z)+\tau_+<+\frac{\pi}{2}\right) \qquad \left(\Re\left(\varkappa+\frac{1+\mu}{2}\right)>0\right)$$

$$(3\,b)\qquad W_{-\varkappa,\frac{\mu}{2}}(z\,e^{-\pi i}) = \frac{z^{\frac{1+\mu}{2}}\,e^{+\pi i\varkappa}}{2^{\mu}\,\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}+\varkappa\right)} \int_{-\infty(\mathfrak{E},-\pi)}^{-\pi i/2(-\tau_-)} e^{2\varkappa s - z/2\cdot \mathfrak{T}g\,s}\,\frac{d\,s}{(\mathfrak{C}of\,s)^{\mu+1}}$$

$$\left(\Re\left(\varkappa+\frac{1+\mu}{2}\right)>0\right).$$

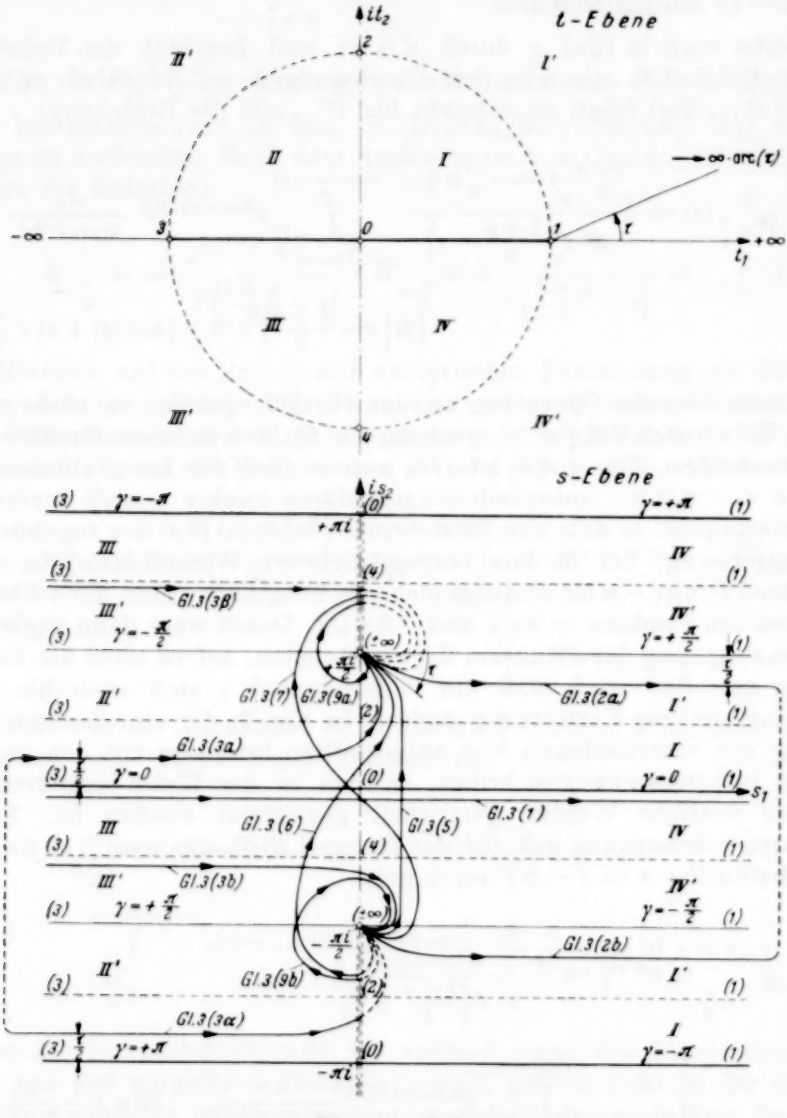

Fig. 1 und 2.

Dabei führt die Benutzung der Gl. (3e, f) hier ohne weiteres zu dem angegebenen Resultat, da die Phasenlage von $t-1$ in 1. (3) zu Beginn

des Weges zu dem Wert $+\pi$ sich mit der Angabe von Gl. 2. (4) auf der Seite $s_1 < 0$ deckt. Bei der Herstellung der Gl. (3 b) ist aber zu beachten, daß in 1. (3) der Anfangswert von $\arc(t-1) = -\pi$ ist. Soll daher $\arc(t-1)$ in dieser Gleichung zu Anfang des Weges zwecks unmittelbarer Anwendung der Gl. 2. (3 e, f) ebenfalls den Wert $+\pi$ haben, so muß man zuvor die linke Seite von 1 (3) mit $\exp(+2\pi i\varkappa - \pi i(\mu-1))$ multiplizieren.

Ersetzt man in (2 a) s durch $s'+\pi i$ und beachtet die Relation $\mathfrak{Cof}\, s = \mathfrak{Cof}\, s'\, e^{+\pi i}$, die aus den Überlegungen im Anschluß an die Gl. 2 (3 a) ... (3 g) folgt, so entsteht für $W_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ die Beziehung:

$$(2\,\mathrm{b}) \quad W_{\varkappa,\frac{\mu}{2}}(z) = \frac{z^{\frac{1+\mu}{2}}\, e^{+\pi i\varkappa - \frac{\pi i}{2}(1+\mu)}}{2^{\mu}\,\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa\right)} \int\limits_{-\frac{\pi i}{2}(-\tau)}^{+\infty(-\pi,\,0)} e^{2\varkappa s - z/2\cdot \mathfrak{T}\mathfrak{g}\, s}\, \frac{d\,s}{(\mathfrak{Cof}\, s)^{\mu+1}}$$

$$\left(\Re\left(\varkappa - \frac{1+\mu}{2}\right) < 0 \qquad |\arc(z)+\tau| < \frac{\pi}{2}\right).$$

Führt man dieselbe Operation an der Gl. (3 a) durch, so muß man jedoch $\mathfrak{Cof}\, s$ durch $\mathfrak{Cof}\, s'\, e^{-\pi i}$ ersetzen, da für den aus dem Punkt $-\infty$ heraustretenden Weg $s_1 < 0$ ist. Da nun in (3 a) der Integrationsweg, solange $\tau_+ < \pi/2$ ist, unterhalb des singulären Punkts $+\pi i/2$ verläuft, so überschneidet in dem neu entstehenden Integral (3 α) der zugehörige Integrationsweg, um in dem vorgeschriebenen Winkelbereich in den singulären Punkt $-\pi i/2$ einzumünden, die imaginäre Achse der s-Ebene zwischen den Punkten $-\pi i/2$ und $-3\pi i/2$. Damit wäre dann zugleich ein Phasensprung der Funktion $\mathfrak{Cof}\, s$ verbunden, sofern nicht die Festsetzung getroffen wird, daß der Phasenwinkel γ sich weiterhin im Sinne der stetigen Fortsetzung ändert. In Fig. 2, die eine Zusammenstellung der verschiedenen hier aufgestellten Integrale mit den zugehörigen Integrationswegen bringt, ist das in der Weise angedeutet, daß der restliche Wegteil gestrichelt gezeichnet worden ist. Eine gleichartige Bemerkung gilt für das Integral (3 β), das aus (3 b) durch die Substitution $s = s' - \pi i$ hervorgeht.

$$(3\,\alpha) \quad W_{-\varkappa,\frac{\mu}{2}}(z\,e^{+\pi i}) = \frac{z^{\frac{1+\mu}{2}}\, e^{+\pi i\varkappa + \pi i(\mu+1)}}{2^{\mu}\,\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}+\varkappa\right)}$$

$$\int\limits_{-\infty(-\pi,\,0)}^{-\pi i/2(-\tau_+)} e^{2\varkappa s - z\cdot 2\cdot \mathfrak{T}\mathfrak{g}\, s}\, \frac{d\,s}{(\mathfrak{Cof}\, s)^{\mu+1}} \qquad \Re\left(\varkappa + \frac{1+\mu}{2}\right) < 0$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} < \arc(z) + \tau_{\pm} < +\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(3\beta)\qquad W_{-\varkappa,\frac{\mu}{2}}(z\,e^{-\pi i}) = \frac{z^{\frac{1+\mu}{2}}\,e^{-\pi i\varkappa+\pi i(\mu+1)}}{2^{\mu}\,\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}+\varkappa\right)} \int_{-\infty(+\pi,0)}^{+\pi i\,2(-\tau_-)} e^{2\varkappa s - z/2\cdot \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,s}\,\frac{d\,s}{(\mathfrak{Cof}\,s)^{\mu+1}} \qquad \Re\left(\varkappa+\frac{1+\mu}{2}\right)<0.$$

Für ein $\Re\left(\frac{1+\mu}{2}\pm\varkappa\right)>0$ ist es erlaubt, die linken und rechten Enden der Integrationswege in den Gl. (1), (2a), (3a), (2b) und (3b) miteinander zu verbinden. Nach dem Residuensatz von CAUCHY entsteht dann sofort die Relation:

$$(4)\qquad M_{\varkappa,\frac{\mu}{2}}(z) = \frac{e^{\pm\pi i\varkappa\mp\frac{\pi i}{2}(1+\mu)}}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}+\varkappa\right)}\,W_{\varkappa,\frac{\mu}{2}}(z) + \frac{e^{\pm\pi i\varkappa}}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa\right)}\,W_{-\varkappa,\frac{\mu}{2}}(z\,e^{\pm\pi i}).$$

Im Hinblick auf das Prinzip der analytischen Fortsetzung gilt sie dann aber auch für beliebige Werte von z, $\varkappa$ und μ. Bilden wir andererseits die Differenz aus den Gl. (2b) und (2a), so ergibt sich für $W_{\varkappa,\mu\,2}(z)$ die gleichfalls für alle Werte von $\varkappa$, μ und z gültige Integraldarstellung:

$$(5)\qquad W_{\varkappa,\frac{\mu}{2}}(z) = \frac{\Gamma\left(\varkappa+\frac{1-\mu}{2}\right)}{2^{\mu}}\,\frac{z^{\frac{1+\mu}{2}}}{2\pi i}\int_{-\frac{\pi i}{2}(-\tau)}^{+\pi i/2\,(-\tau')} e^{2\varkappa s - z/2\cdot\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,s}\,\frac{d\,s}{(\mathfrak{Cof}\,s)^{\mu+1}} \qquad \left(-\frac{\pi}{2}<\arg(z)+(\tau,\tau')<+\frac{\pi}{2}\right)$$

Die Differenz der Gl. (3a, α) führt für die Funktion $W_{-\varkappa,\mu\,2}(z\,e^{+\pi i})$ zu der ähnlichen, stets gültigen Darstellung:

$$(6)\qquad W_{-\varkappa,\frac{\mu}{2}}(z\,e^{+\pi i}) = \frac{\Gamma\left(-\varkappa+\frac{1-\mu}{2}\right)}{2^{\mu}}\,\frac{(z\,e^{+\pi i})^{\frac{1+\mu}{2}}}{2\pi i}\int_{-\frac{\pi i}{2}(-\tau_+)}^{+\pi i/2\,(-\tau_+)} e^{2\varkappa s - z/2\cdot\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,s}\,\frac{d\,s}{(\mathfrak{Cof}\,s)^{1+\mu}} \qquad \left(-\frac{\pi}{2}<\arg(z)+\tau,\tau_+<+\frac{\pi}{2}\right).$$

In beiden Integralen (5) und (6) verläuft zwar der Integrationsweg zwischen den singulären Punkten $\pm\pi i/2$, jedoch zieht in der Gl. (6) der Weg zunächst im Uhrzeigersinn unterhalb des singulären Punktes $-\pi i/2$ herum, ehe er nach Überquerung der imaginären s-Achse von links nach rechts zu dem singulären Punkt $+\pi i/2$ hinaufläuft. Ziehen wir schließlich noch durch Differenzbildung die Integrale (3b, β) zu-

sammen, so gelangen wir zu dem Integral:

$$(7)\quad W_{-\varkappa,\frac{\mu}{2}}(z\,e^{-\pi i}) = \frac{\Gamma\left(-\varkappa+\frac{1-\mu}{2}\right)(z\,e^{-\pi i})^{\frac{1+\mu}{2}}}{2^{\mu}\,2\pi i} \int_{-\frac{\pi i}{2}(-\tau_-)}^{+\pi i/2(-\tau'_-)} e^{2\varkappa s - z/2\cdot \mathfrak{T}\mathfrak{g}\, s}\,\frac{d\,s}{(\mathfrak{Cof}\, s)^{1+\mu}} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \arg(z)+\tau_-, \tau'_- < +\frac{\pi}{2}\right).$$

Dieses unterscheidet sich von den Integralen (5) und (6) dadurch, daß jetzt der Integrationsweg vom unteren singulären Punkt aus zunächst von rechts nach links wiederum die imaginäre Achse überschneidet und dann im Uhrzeigersinn den Punkt $+\pi i/2$ oberhalb dieses Punktes umläuft.

Ein anderes bemerkenswertes Formelpaar entsteht, wenn man einmal die Gl. (3a) von der Gl. (3β) abzieht und zum anderen die Gl. (3α) von der Gl. (3b) und obendrein von den Beziehungen

$$(8\,a)\quad M_{-\varkappa,\frac{\mu}{2}}(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}-\varkappa\right)}{2\pi i}\left\{e^{+\frac{\pi i}{2}(1+\mu)} W_{\varkappa,\frac{\mu}{2}}(z\,e^{+\pi i}) - e^{-\pi i\frac{1+\mu}{2}} W_{\varkappa,\frac{\mu}{2}}(z\,e^{-\pi i})\right\}$$

$$(8\,b)\quad W_{-\varkappa,\frac{\mu}{2}}(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}-\varkappa\right)}{2\pi i}\left\{e^{-\pi i\varkappa} W_{\varkappa,\frac{\mu}{2}}(z\,e^{+\pi i}) - e^{+\pi i\varkappa} W_{\varkappa,\frac{\mu}{2}}(z\,e^{-\pi i})\right\}$$

Gebrauch macht, die man aus der Doppelgl. (4) durch Elimination von $W_{\varkappa,\mu/2}(z)$ gewinnen kann. Es ergeben sich dann die beiden Formeln:

$$(9\,a)\quad M_{\varkappa,-\frac{\mu}{2}}(z) = 2^{-\mu} z^{\frac{1+\mu}{2}} e^{-\pi i\left(\varkappa+\frac{1+\mu}{2}\right)} \frac{1}{2\pi i} \int_{+\pi i/2(-\tau_+)}^{(+\pi i/2-)} e^{2\varkappa s - z/2\cdot \mathfrak{T}\mathfrak{g}\, s}\,\frac{d\,s}{(\mathfrak{Cof}\, s)^{\mu+1}}$$

$$(9\,b)\quad M_{\varkappa,-\frac{\mu}{2}}(z) = 2^{-\mu} z^{\frac{1+\mu}{2}} e^{-\pi i\left(\varkappa+\frac{1+\mu}{2}\right)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi i/2(-\tau_-)}^{(-\pi i/2-)} e^{2\varkappa s - z/2\cdot \mathfrak{T}\mathfrak{g}\, s}\,\frac{d\,s}{(\mathfrak{Cof}\, s)^{\mu+1}}$$

Die zweite von ihnen könnte auch aus der ersten durch die Substitution $s = s' + \pi i$ hergeleitet werden. Über den Phasenwinkel γ von $\mathfrak{Cof}\, s$ in diesen beiden Integralen dürfte nach den Angaben zu Gl. (2b) kein Zweifel bestehen. Ist in (9a, b) $\mu = m$ gleich einer positiven ganzen Zahl, so sind die linken Seiten von (9a, b) im Sinne von Grenzwertgleichungen zu nehmen. Sie behalten dann nach wie vor einen Sinn, und wegen der Eindeutigkeit von $(\mathfrak{Cof}\, s)^{\mu+1}$ kann nunmehr rechts als Integrationsweg ein gewöhnlicher kreisförmiger Umlauf gewählt werden.

4. Integraldarstellungen für die Produkte zweier parabolischer Funktionen.

Um auch einige Beispiele von Integraldarstellungen der hier behandelten Art für das Produkt aus zwei parabolischen Funktionen zu geben, gehen wir von dem bekannten HANKEL'schen Integral (1) aus und bilden damit das Produkt aus den beiden Funktionen $M_{\varkappa_1,\mu_1/2}(x)$

$$(1)\quad M_{\varkappa,\frac{\mu}{2}}(z)=\frac{2\,z^{1/2}\,e^{z/2}}{\Gamma\left(\varkappa+\frac{1+\mu}{2}\right)}\int_0^\infty e^{-t^2}\,t^{2\varkappa}\,J_\mu(2\,t\,z^{1/2})\,dt\qquad\left(\Re\left(\varkappa+\frac{1+\mu}{2}\right)>0\right)$$

und $M_{\varkappa_2,\mu_2/2}(y)$. Die Integrationsvariablen der zunächst noch separierbaren beiden Integrale seien s und t. Durch die Substitution $t=\varrho\cos\varphi$ und $s=\varrho\sin\varphi$ läßt sich dann dieses Doppelintegral auf die Form

$$(2)\quad M_{\varkappa_1,\mu_1/2}(x)\,M_{\varkappa_2,\mu_2/2}(y)$$
$$=\frac{4\,(xy)^{1/2}\,e^{(x+y)/2}}{\Gamma\left(\varkappa_1+\frac{1+\mu_1}{2}\right)\,\Gamma\left(\varkappa_2+\frac{1+\mu_2}{2}\right)}\int_0^\infty\int_0^{+\pi/2} e^{-\varrho^2}\,\varrho^{2\varkappa_1+2\varkappa_2+1}\cos^{2\varkappa_1}\varphi\sin^{2\varkappa_2}\varphi$$
$$J_{\mu_1}(2\varrho\sqrt{x}\cos\varphi)\,J_{\mu_2}(2\varrho\sqrt{x}\sin\varphi)\,d\varphi$$

bringen. Für ein $\varkappa_1=-\varkappa_2=\varkappa$ und $\mu_1=\mu_2=\mu$ kann die Integration über ϱ auf Grund der bei G. N. WATSON angegebenen Formel

$$2\int_0^\infty e^{-\varrho^2}\,J_\mu(2\varrho\sqrt{x}\cos\varphi)\,J_\mu(2\varrho\sqrt{y}\sin\varphi)\,\varrho\,d\varrho$$
$$=e^{-(x+y)/2-(x-y)/2\cos 2\varphi}\,I_\mu(\sqrt{xy}\sin 2\varphi)\qquad(\Re(\mu)>-1)$$

ausgeführt werden. Die Substitution $\sin 2\varphi=1/\mathfrak{Cof}\,s$ führt dann schließlich zu der Integraldarstellung (3a), in der $I_\mu(z)=e^{-\pi i\mu/2}\,J_\mu(iz)$

$$(3\,a)\quad M_{\varkappa,\frac{\mu}{2}}(x)\,M_{-\varkappa,\frac{\mu}{2}}(y)=e^{\mp\frac{\pi i}{2}(1+\mu)}\,M_{\varkappa,\frac{\mu}{2}}(x)\,M_{\varkappa,\frac{\mu}{2}}(y\,e^{\pm\pi i})$$
$$=\frac{(xy)^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}+\varkappa\right)\,\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa\right)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\varkappa s-(x-y)/2\cdot\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,s}\,I_\mu\left(\frac{\sqrt{xy}}{\mathfrak{Cof}\,s}\right)\,\frac{ds}{\mathfrak{Cof}\,s}$$
$$\Re\left(\mp\varkappa+\frac{1+\mu}{2}\right)>0.$$

Für $x,y>0$ durchweg Hauptwerte.

die modifizierte BESSEL'sche Funktion bedeutet. Setzt man in (3a) $y=y'\,e^{-\pi i}$ und beachtet nach Multiplikation von (3a) mit $e^{+\pi i/2\,(1+\mu)}$ die bekannten Halbumlaufsrelationen für die Funktionen $M_{\varkappa,\mu/2}(z)$ und $I_\mu(z)$, so entsteht die Beziehung:

$$(3\,b)\quad e^{+\frac{\pi i}{2}(1+\mu)}\,M_{\varkappa,\frac{\mu}{2}}(x)\,M_{-\varkappa,\frac{\mu}{2}}(y\,e^{-\pi i})=M_{\varkappa,\frac{\mu}{2}}(x)\,M_{\varkappa,\frac{\mu}{2}}(y)$$
$$=\frac{(xy)^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}+\varkappa\right)\,\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa\right)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\varkappa s-(x+y)/2\cdot\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,s}\,J_\mu\left(\frac{\sqrt{xy}}{\mathfrak{Cof}\,s}\right)\,\frac{ds}{\mathfrak{Cof}\,s}$$
$$\left(\Re\left(\mp\varkappa+\frac{1+\mu}{2}\right)>0\right).$$

Aus dem Aufbau des Integranden von (3b) läßt sich schließen, daß auch die Funktion $F(x, y)$ von Gl. (4) dem Produkt zweier parabolischer Funktionen oder einer linearen Kombination von solchen gleich sein muß. Die Konvergenz dieses Integrals verlangt in bezug auf die obere Grenze das Bestehen der Ungleichung $\Re(\varkappa) < \Re\left(\frac{1+\mu}{2}\right)$

$$(4) \qquad F(x,y) = (xy)^{1/2} \int_{+\pi i/2\,(\varphi)}^{\infty\,(0,+\pi)} e^{2\varkappa s - (x+y)\,2\,\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,s}\, H_\mu^{(2)}\left(\frac{\sqrt{xy}}{\mathfrak{Cof}\,s}\right) \frac{ds}{\mathfrak{Cof}\,s}$$

$$\Re\left(\varkappa - \frac{1+\mu}{2}\right) < 0$$

$$|2\arg(\sqrt{x}+\sqrt{y}) - \varphi| < \pi/2$$

und in bezug auf die untere Grenze ist erforderlich, daß der Winkel φ, unter dem der Integrationsweg aus dem wesentlich singulären Punkt $+\pi i/2$ austritt, der zu (4) angegebenen Bedingung genügt. Sie folgt unmittelbar aus der asymptotischen Entwicklung der Funktion $H_\mu^{(2)}$, in Rücksicht auf deren Gültigkeit seinerseits $|\arg(\sqrt{xy}) - \varphi| < 3\pi/2$ sein muß.

Um nun die Zusammensetzung von $F(x, y)$ herauszufinden, lassen wir in (4) $y \to 0$ gehen und beachten dabei, daß

$$\lim_{y\to 0}\left\{\pi i \sqrt{xy}\; e^{-\pi i\mu/2} H_\mu^{(2)}\left(\frac{\sqrt{xy}}{\mathfrak{Cof}\,s}\right) y^{-\frac{1\pm\mu}{2}}\right\} \to \begin{cases} -\Gamma(-\mu)\, x^{\frac{1+\mu}{2}}\, e^{+\pi i\mu/2}/(2\,\mathfrak{Cof}\,s)^\mu \\ -\Gamma(+\mu)\, x^{\frac{1-\mu}{2}}\, e^{-\pi i\mu/2}/(2\,\mathfrak{Cof}\,s)^\mu \end{cases}$$

obere Zeile: $\Re(\mu) < 0$ untere Zeile: $\Re(\mu) > 0$

ist. In diesen beiden Grenzwertgleichungen, die nach Vertauschung von x und y auch für $x \to 0$ gelten, drückt sich die bekannte Tatsache aus, daß $\exp(-\pi i/2\mu)\, H_\mu^{(2)}(z)$ eine in μ gerade Funktion ist. Dementsprechend wird im Hinblick auf die Gl. 3. (2a) und wegen $W_{\varkappa,\mu/2}(z) = W_{\varkappa,-\mu/2}(z)$:

$$\lim_{y\to 0}\left\{y^{-\frac{1+\mu}{2}} F(x,y)\right\} \to e^{+\pi i\varkappa + \frac{\pi i\mu}{2}}\, W_{\varkappa,\frac{\mu}{2}}(x) \begin{cases} \Gamma\left(\frac{1+\mu}{2} - \varkappa\right)\Gamma(-\mu)/\pi & \Re(\mu) < 0 \\ \Gamma\left(\frac{1+\mu}{2} - \varkappa\right)\Gamma(+\mu)/\pi & \Re(\mu) > 0 \end{cases}$$

Nun ist aber bekanntlich

$$(5) \qquad W_{\varkappa,\frac{\mu}{2}}(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi\mu)} \left\{ -\frac{M_{\varkappa,+\frac{\mu}{2}}(z)}{\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2} - \varkappa\right)} + \frac{M_{\varkappa,-\frac{\mu}{2}}(z)}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2} - \varkappa\right)} \right\}$$

und also gemäß der Definitionsgleichung der Funktion $M_{\varkappa,\mu/2}(z)$ durch die Kummer'sche Funktion

$$\lim_{y\to 0}\left\{ y^{-\frac{1+\mu}{2}}\, W_{\varkappa,\frac{\mu}{2}}(y)\right\} \to \Gamma(\mp\mu)\,\Gamma\left(\frac{1\pm\mu}{2} - \varkappa\right).$$

Da nun die Vertauschung von x und y beim Grenzübergang zu ganz analogen Resultaten führt, so ist damit die Funktion $F(xy)$ in (4) gemäß (5a) eindeutig bestimmt. Ersetzt man in (5a) s durch $s' + \pi i$, so entsteht aus (5a) wegen $\mathfrak{Cof}\, s = \mathfrak{Cof}\, s' \cdot e^{+\pi i}$ unter Berücksichtigung

$$(5\,\mathrm{a}) \quad W_{\varkappa,\frac{\mu}{2}}(x)\, W_{\varkappa,\frac{\mu}{2}}(y) = \pi \frac{e^{-\pi i \varkappa - \pi i \mu/2}\,(xy)^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2} - \varkappa\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2} - \varkappa\right)} \int\limits_{+\pi i}^{\infty(0,\pi)} e^{2\varkappa s - (x+y)/2 \cdot \mathfrak{T}\mathfrak{g}\, s} H_\mu^{(2)}\left(\frac{\sqrt{xy}}{\mathfrak{Cof}\, s}\right) \frac{ds}{\mathfrak{Cof}\, s}$$

$$\Re(\varkappa) < \Re\left(\frac{1+\mu}{2}\right),\ |\arc(\sqrt{xy} - \varphi)| < \frac{3\pi}{2},\ |2\arc(\sqrt{x} + \sqrt{y}) - \varphi| < \frac{\pi}{2}$$

der Halbumlaufsrelation für $H_\mu^{(2)}$ die Darstellung (5b). Eine weitere der

$$(5\,\mathrm{b}) \quad W_{\varkappa,\frac{\mu}{2}}(x)\, W_{\varkappa,\frac{\mu}{2}}(y) = \pi \frac{e^{+\pi i \varkappa + \pi i \mu/2}\,(xy)^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2} - \varkappa\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2} - \varkappa\right)} \int\limits_{-\pi i}^{\infty(0,\pi)} e^{2\varkappa s - (x+y)\cdot 2 \cdot \mathfrak{T}\mathfrak{g}\, s} H_\mu^{(1)}\left(\frac{\sqrt{xy}}{\mathfrak{Cof}\, s}\right) \frac{ds}{\mathfrak{Cof}\, s}$$

Gl. (3a) entsprechende Beziehung ergibt sich aus dem Übergang von y zu $y\, e^{\pm \pi i}$.

Ähnliche Integraldarstellungen für die Produkte Wh.-Funktionen hat auf anderem Wege W. T. Howell [3] gefunden. Er hat sie in der Form aufgestellt:

$$(6) \quad W_{\varkappa,\frac{\mu}{2}}(a_1 t)\, W_{\varkappa,\frac{\mu}{2}}(a_2 t) = \frac{2t\sqrt{a_1 a_2}}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2} - \varkappa\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2} - \varkappa\right)} \int_0^\infty e^{-(a_1+a_2)\, t/2 \cdot \mathfrak{Cof}\, v} K_\mu(t\sqrt{a_1 a_2})\, \mathfrak{Sin}\, v \left(\mathfrak{Cotg}\, \frac{v}{2}\right)^{2\varkappa} dv$$

$$(\Re(1 - 2\varkappa) > |\Re(\mu)|, \quad \Re(t(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2})^2) > 0).$$

Durch eine geeignete Substitution läßt sich in der Tat (5) in (6) überführen. Die von A. Erdelyi [4, 5] angegebenen hierhergehörigen Integraldarstellungen können hingegen nicht auf die hier behandelte Form gebracht werden.

5. Anwendungen.

1. In den Anwendungen tritt sehr häufig der Fall ein, daß in 4 (3b) $\varkappa = i\tau$ mit $\tau \gtrless 0$ ist und auch die Argumente x und y rein imaginäre Größen sind. Setzen wir demgemäß etwa $x = +i\xi_1$ und $y = -i\xi_2$,

so geht sie über in die Beziehung:

$$(1)\qquad (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{+i\tau t}\, e^{-i(\zeta_1+\zeta_2)/2\cdot \mathfrak{T}\mathfrak{g}(t/2)}\, I_\mu\left(\frac{\sqrt{\zeta_1\zeta_2}}{\mathfrak{Cof}(t/2)}\right)\frac{dt}{\mathfrak{Cof}(t/2)}$$

$$= (2/\pi)^{1/2} e^{-\frac{\pi i}{2}\mu}\,\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-i\tau\right)\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}+i\tau\right)$$

$$(\Re(\mu)>-1)\qquad (i\zeta_1\, i\zeta_2)^{-1/2} M_{i\tau,\frac{\mu}{2}}(+i\zeta_1)\, M_{i\tau,\frac{\mu}{2}}(+i\zeta_2).$$

Nach dem Umkehrtheorem von Fourier, dessen Voraussetzungen hier erfüllt sind, ist also auch

$$(2)\qquad (2\pi)^{-1/2} e^{-\pi i\mu/2}\left(\frac{2/\pi}{i\zeta_1\cdot i\zeta_2}\right)^{1/2}\cdot$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau t} M_{i\tau,\frac{\mu}{2}}(+i\zeta_1)\, M_{i\tau,\frac{\mu}{2}}(+i\zeta_2)\,\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}+i\tau\right)\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-i\tau\right)d\tau$$

$$= e^{-i(\zeta_1+\zeta_2)/2\,\mathfrak{T}\mathfrak{g}(t/2)}\, I_\mu\left(\frac{\sqrt{\zeta_1\zeta_2}}{\mathfrak{Cof}(t/2)}\right)(1/\mathfrak{Cof}(t/2)).$$

Läßt man hierin $\zeta_2\to 0$ gehen, so kommt die einfachere Formel (3) zustande. Führt man in (3) den weiteren Grenzübergang $\zeta_1\to 0$ durch, so

$$(3)\quad (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{\pi i}{4}\mu}(2/\pi)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau t}\,\frac{M_{i\tau,\frac{\mu}{2}}(+i\zeta_1)}{(i\zeta_1)^{1/2}}\,\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-i\tau\right)\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}+i\tau\right)d\tau$$

$$= \left(\frac{\zeta_1}{4}\right)^{\mu/2}\frac{e^{-i\zeta_1/2\cdot\mathfrak{T}\mathfrak{g}(t/2)}}{(\mathfrak{Cof}\, t/2)^{1+\mu}}$$

gelangt man zu dem bekannten Fourierpaar (4 a, b).

$$(4\,a)\quad (2/\pi)^{1/2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}+i\tau\right)\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-i\tau\right)}{\Gamma(1+\mu)}\qquad (4\,b)\quad 2\left\{2\,\mathfrak{Cof}\,\frac{t}{2}\right\}^{-1-\mu}.$$

2. Eine bemerkenswerte Reihenentwicklung kann aus der Gl. 3 (9 a) gewonnen werden. Setzt man nämlich darin $s=\pi i/2+t$ und geht gleichzeitig von $-\mu$ zu $+\mu$ über, so erhält man wegen $\mathfrak{Cof}\, s = i\,\mathfrak{Sin}\, t$ die Darstellung (5). Der Integrationsweg tritt hier aus dem singulären

$$(5)\qquad M_{\varkappa,\frac{\mu}{2}}(z) = 2^\mu\,\frac{(z\,e^{-\pi i})^{\frac{1-\mu}{2}}}{2\pi i}\int_{0(-\varepsilon)}^{(0-)} e^{2kt-z/2\,\cdot\,\mathfrak{Cotg}\, t}\,\frac{dt}{(i\,\mathfrak{Sin}\, t)^{1-\mu}}$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}<\arg(z)+\varepsilon<+\frac{\pi}{2}\right).$$

Punkt $t=0$ unter dem Winkel $-\varepsilon$ gegen die positiv reelle Achse aus, umläuft den Nullpunkt im mathematisch negativen Sinne und tritt dann

wieder unter einem Winkel ε, der die angegebene Ungleichung erfüllt, in den Punkt $t = 0$ ein. Wir können nun schreiben:

$$e^{-z/2 \cdot \operatorname{Cotg} t} (\operatorname{Sin} t)^{\mu-1} = e^{-z/2\, t}\, t^{\mu-1}\, e^{-z/2 \cdot \left(\operatorname{Cotg} t - \frac{1}{t}\right)} \left(\frac{t}{\operatorname{Sin} t}\right)^{1-\mu}.$$

Andererseits besteht aber die für alle $|t| < \pi$ absolut und gleichmäßig konvergente Entwicklung:

$$(6) \qquad e^{-z/2 \cdot \left(\operatorname{Cotg} t - \frac{1}{t}\right)} \left(\frac{t}{\operatorname{Sin} t}\right)^{1-\mu} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} p_\lambda^{(\mu)}(z) \left(-\frac{t}{z}\right)^\lambda \qquad (|t| < \pi).$$

Für die ersten fünf Koeffizienten, die allgemeine gerade Polynome in z vom höchsten Grade 2λ und vom niedrigsten Grade $2\left[\frac{1+\lambda}{2}\right]$ sind, gelten die Formeln:

$$(6\,a) \quad p_0^{(\mu)}(z) = 1 \qquad (6\,b) \quad p_1^{(\mu)}(z) = z^2/6 \qquad (6\,c) \quad p_2^{(\mu)}(z) = \frac{z^2}{6}\left(\frac{z^2}{12} + \mu - 1\right)$$

$$(6\,d) \quad p_3^{(\mu)}(z) = \frac{z^4}{36}\left(\frac{z^2}{36} + \mu - \frac{7}{5}\right)$$

$$(6\,e) \quad p_4^{(\mu)}(z) = \frac{z^4}{36}\left[\frac{z^4}{864} - z^2\,\frac{4 + 5(1-\mu)}{60} + (1-\mu)\,\frac{2 + 5(1-\mu)}{10}\right].$$

Außerdem bestehen für sie die Beziehungen

$$(6\,\alpha) \quad \lambda\, p_\lambda^{(\mu)}(z) = \sum_{k=1}^{\lambda} c_k(z)\, p_{\lambda-k}^{(\mu)}(z) \qquad (6\,\beta) \quad c_{2k-1}(z) = (k - 1/2)\,\frac{(2z)^{2k} B_{2k}}{(2k)!}$$

$$(6\,\gamma) \quad c_{2k}(z) = (\mu - 1)\,\frac{(2z)^{2k} B_{2k}}{(2k)!} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

die irgend einen Koeffizienten der Folge durch alle vorangehenden ausdrücken. In $(6\,\beta, \gamma)$ sind die B_{2k} die bekannten BERNOULLI'schen Zahlen in der Definition von E. NÖRLUND. Schließlich besteht für die $p^{(\mu)}(z)$ noch die Darstellung durch das Umlaufsintegral

$$(6') \qquad p_\lambda^{(\mu)}(z) = \frac{(-z)^\lambda}{2\pi i} \int^{(0+)} e^{-z/2\left[\operatorname{Cotg} t - \frac{1}{t}\right]} \left(\frac{\operatorname{Sin} t}{t}\right)^{\mu-1} \frac{dt}{t^{\lambda+1}} \qquad (|t| < \pi).$$

Geht man mit (6) in (5) ein, so erhält man

$$(7) \qquad M_{\varkappa, \frac{\mu}{2}}(z) = 2^\mu (z\, e^{-2\pi i})^{\frac{1-\mu}{2}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} p_\lambda^{(\mu)}(z)\, \frac{(-z)^{-\lambda}}{2\pi i} \int_{0\,(-\varepsilon)}^{(0-)} e^{2\varkappa t - z/2t}\, t^{\mu+\lambda-1}\, dt.$$

Wir führen nun in (7) die Substitution $t = (z/4\varkappa)^{1/2} v$ durch. Dann gilt für ein einzelnes Integral von (7)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{0\,(-\varepsilon)}^{(0-)} e^{2\varkappa t - (z/2t)}\, t^{\mu+\lambda-1}\, dt = (z/4\varkappa)^{\frac{\mu+\lambda}{2}} \frac{1}{2\pi i} \int_{0\,(\varphi)}^{(0-)} e^{\sqrt{z\varkappa}\,(v - 1/v)}\, v^{\mu+\lambda-1}\, dv$$

$$\left(|\arg(\sqrt{z\varkappa}) - \varphi| < \frac{\pi}{2}\right).$$

Nach einem von Sonine stammenden und bei G. N. Watson besprochenen Integral aus der Theorie der Zylinderfunktionen ist aber

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty(-\pi)}^{(0+)} u^{-\nu-1} e^{z/2\left(u-\frac{1}{u}\right)} du \tag{8}$$

$$= \frac{e^{+\pi i(1+\nu)}}{2\pi i} \int_{0(0)}^{(0-)} e^{z/2\left(s-\frac{1}{s}\right)} s^{\nu-1} ds.$$

Im zweiten Integral, das aus dem ersten durch die Substitution $u = (1/s)\, e^{-\pi i}$ hervorgeht, verläuft der Integrationsweg vom wesentlich singulären Punkt $s = 0$ zunächst in der positiven Richtung der reellen s-Achse, umläuft dann im negativen Sinne den Nullpunkt und tritt wieder in der negativen Richtung der reellen s-Achse von rechts her in den singulären Nullpunkt ein. Statt der im zweiten Integral von (8) angegebenen Forderung, daß anfangs $\arc(s) = 0$ sein soll, kann auch die allgemeinere Bestimmung treten, daß beim Anlaufen des Nullpunktes $-\pi/2 < \arc(z) - \arc(s) < +\pi/2$ ist. Die in (7) und (8) vorkommenden Integrale sind mithin von genau derselben Art, und nach gehöriger Zusammenfassung entsteht damit aus der Gl. (7) die für alle Werte von $\mu, \varkappa$ und z gültige Entwicklung:

$$z^{-\frac{1+\mu}{2}} M_{\varkappa, \frac{\mu}{2}}(z) = e^{-z/2} \frac{{}_1F_1\left(\frac{1+\mu}{2} - \varkappa;\ 1+\mu;\ z\right)}{\Gamma(1+\mu)} \tag{9}$$

$$= 2^\mu \sum_{\lambda=0}^{\infty} p_\lambda^{(\mu)}(z) \frac{J_{\mu+\lambda}\left(2\sqrt{z\varkappa}\right)}{\left(2\sqrt{z\varkappa}\right)^{\mu+\lambda}}.$$

Läßt man in (5) $\varkappa \to 0$ gehen und beachtet, daß dafür die linke Seite im wesentlichen in die Funktion $I_{\mu/2}(z/2)$ übergeht, so wird man zu der Beziehung

$$\pi^{1/2} \frac{I_\mu(z/2)}{z^{\mu/2}} = \Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}\right) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{p_\lambda^{(\mu)}(z)}{2^\lambda\, \Gamma(\mu+\lambda+1)}. \tag{9 a}$$

geführt. Auf ihrer rechten Seite steht eine in jedem beschränkten Bereich von z gleichmäßig konvergente Polynomentwicklung für die Funktion $I_{\mu/2}(z/2)$.

Die Formel (5) wurde vom Verfasser unter beschränkteren Gültigkeitsbedingungen auf dem nämlichen Wege bereits in dem Bericht [1] hergeleitet. Eine ähnliche Formel ist jedoch im Zusammenhang mit einer anderen Fragestellung schon früher von H. Schmidt [6] aufgefunden worden. Sie lautet in einer gegenüber der Originalarbeit veränderten Schreibweise

$$\frac{2^{1-c}}{\Gamma(c)}\, {}_1F_1(-a;\ c;\ z)$$

$$= \frac{J_{c-1}\left(2\sqrt{az}\right)}{\left(2\sqrt{az}\right)^{c-1}} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1/a)^\lambda \left\{ \sum_{p=1}^{\lambda} \frac{(-2az)^{\lambda+p}}{(\lambda+p)!}\, d_{\lambda p}^{1} \frac{J_{c-1+\lambda+p}\left(2\sqrt{az}\right)}{\left(2\sqrt{az}\right)^{c-1+\lambda+p}} \right\}.$$

Hierin hängen die $d^{(1)}_{\lambda,p}$ mit den STIRLING'schen Zahlen zweiter Art zusammen. Eine noch etwas allgemeinere Formel der gleichen Art hat F. TRICOMI [7] in einer neueren Arbeit auf dem Wege über die LAPLACE-Transformation entwickelt. Sie lautet

$$\frac{2^{1-c}}{\Gamma(c)}\,{}_1F_1(-a;\,c;\,z) = e^{hz}\sum_{\lambda=0}^{\infty} A_\lambda\cdot(2z)^\lambda\,\frac{J_{\lambda+c-1}(2\sqrt{a\,z})}{(2\sqrt{a\,z})^{\lambda+c-1}}$$

mit den Koeffizienten A_λ in der Bedeutung der Entwicklungskoeffizienten des Ausdrucks

$$e^{az}\,\frac{[1+(h-1)\,z]^a}{(1+h\,z)^{a+c}} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} A_\lambda\,z^\lambda$$

nach Potenzen von z. Es scheint aber nicht ohne weiteres möglich zu sein, die obige Entwicklung (5) mit einer dieser beiden Formen in Übereinstimmung zu bringen, da in $M_{\varkappa,\mu/2}(z)$ die KUMMER'sche Funktion in der Gestalt ${}_1F_1\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa,\ 1+\mu,\ z\right)$ erscheint.

3. Setzt man schließlich in 3.(5) $\mu = -1$, so kann wegen des Fortfalls der Funktion $\mathfrak{Cof}\,s$ unter dem Integralzeichen der Geltungsbereich der Integraldarstellung auf das abgeschlossene Intervall $|\arc(z)+(\tau,\tau')| \leqq \pi/2$ erweitert werden. Für ein reelles $z = x > 0$ ist es danach erlaubt, z. B. an der unteren Grenze $\tau = -\pi/2$ und an der oberen Grenze $\tau = +\pi/2$ zu setzen und als Integrationsweg die imaginäre Achse der s-Ebene zu wählen. Mit $s = i\,\vartheta$ und $z = x$ wird dann

$$W_{\varkappa,\frac{1}{2}}(x) = \frac{\Gamma(1+\varkappa)}{\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} e^{i\,(2\varkappa\vartheta\,-\,x/2\,\cdot\,\mathrm{tg}\,\vartheta)}\,d\,\vartheta. \tag{10}$$

Vergleicht man dies mit der Definitionsgleichung der von H. BATEMAN [8] eingeführten k-Funktion, so besteht zwischen dieser und der Funktion $W_{\varkappa,\pm\frac{1}{2}}$ der Zusammenhang:

$$k_\nu(x) \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} e^{ix\,\mathrm{tg}\,\vartheta\,-\,i\nu\vartheta}\,d\,\vartheta = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\pi/2}\cos(x\,\mathrm{tg}\,\vartheta-\nu\,\vartheta)\,d\,\vartheta \tag{11}$$

$$= \frac{W_{\frac{\nu}{2},\pm\frac{1}{2}}(2x)}{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)}.$$

Da für $\nu = 2n$ mit $n = 0, +1, +2 \ldots$ $W_{\nu/2,\pm\frac{1}{2}} = W_{n,-\frac{1}{2}}$ ist und die Funktion $W_{\varkappa,\frac{\mu}{2}}$ für ein $\varkappa = n + \frac{1+\mu}{2}$ im wesentlichen mit den LAGUERRE-Polynomen übereinstimmt, so folgt daraus sofort die Beziehung

$$k_{2n}(x) = (-)^n\,e^{-x}\,L_n^{(-1)}(2x) \qquad (x>0;\ n=0,1,2\ldots) \tag{11a}$$

und für $\nu = -2n$ unmittelbar die weitere

$$k_{-2n}(x) = 0 \qquad (x>0;\ n=1,2,3\ldots). \tag{11b}$$

Andererseits ist nach einem bekannten Zusammenhang zwischen der Funktion $K_\nu(x) = \pi i/2\, e^{\pi i\nu/2} H_\nu^{(1)}(ix)$ und der Funktion $W_{\varkappa,\mu/2}(x)$ im Hinblick auf die Gl. 3. (5)

$$e^{-x} x^{n+1} K_{n+1}(x) \equiv (\pi/2)^{1/2} e^{-x} x^{n+1/2} W_{0,-(n+1)}(2x)$$
$$= \pi^{1/2} 2^{n+1} \Gamma(n+3/2) \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi i/2(0)}^{+\pi i/2(0)} e^{-x(1+\mathfrak{Tg}\, s)} (\mathfrak{Cof}\, s)^{2n+1}\, ds.$$

So ist mithin auch

$$\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} \{e^{-x} x^{n+1} K_{n+1}(x)\}$$
$$= -\pi^{1/2} 2^{n+1} e^{-x} \Gamma(n+3/2) \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi i/2(0)}^{+\pi i/2(0)} e^{(2n+1)s - x\mathfrak{Tg}\, s}\, ds.$$

Da hier in dem Integral ebenso wie oben verfahren werden kann, so wird in Rücksicht auf (11):

$$(11\,c) \quad k_{2n+1}(x) = -e^x/\{\pi^{1/2} 2^n \Gamma(n+3/2)\} \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} [e^{-x} x^{n+1} K_{n+1}(x)]$$
$$(n = 0, 1, 2 \ldots).$$

Diese letzte Formel scheint neu zu sein. Eine große Fülle weiterer Beziehungen ist in der Originalarbeit von Bateman zu finden.

Die Fig. 1 und 2 erläutern die wichtigsten Eigenschaften der konformen Abbildung durch die Funktion $t = \mathfrak{Tg}\, s$ und zeigen den Verlauf der Integrationswege in den Gl. 3.(1), (2 a, b), (3 a, b), (3 α, β), (5), (6), (7) und (9 a, b).

Literaturverzeichnis.

H. Buchholz.
[1] ZAMM, 23 (1943), S. 47—58.
H. Buchholz.
[2] ZAMM, 30 (1950), S. 133—148.
W. T. Howell.
[3] Phil. Mag. (7), 25 (1938), S. 456—458.
A. Erdelyi.
[4] Phil. Mag. (7), 26 (1938), S. 821—877.
A. Erdelyi.
[5] Nieuw. Arch. Wiskunde 20 (1939), S. 1—34.
H. Schmidt.
[6] Math. Zeitschrift, 43 (1937), S. 533—552.
F. Tricomi.
[7] Ann. Math. pura appl., Bologna (4), 26 (1947), S. 141—175.
H. Bateman.
[8] Transact. Amer. Math. Soc., 33 (1931), S. 817—831.

(Eingegangen am 22. Juli 1949.)